Inglaterra

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES EN INGLATERRA

Es Inglaterra el país que en menor tiempo ha hecho reformas más radicales en la enseñanza de las matemáticas elementales: al decir ésto no quiero significar que en ese país hayan alcanzado mayor progreso y mayor difusión los nuevos métodos que en Alemania, Austria y Francia. El profesorado inglés, que aceptó y propagó las ideas de la reforma de la enseñanza matemática, tuvo que luchar contra la enorme resistencia de la secular tradición universitaria, más fuerte en Inglaterra que en ningún otro país, y contra los intereses de los directores y profesores de las escuelas particulares de más prestigio y de mayor influencia en la educación secundaria.

Los informes que en extracto aparecen a continuación, referentes a diversas cuestiones de la enseñanza matemática elemental, dan una idea clara y general del estado de esa enseñanza en Inglaterra, de las dificultades que tuvo que vencer la reforma de los métodos, de los defectos que aun subsisten y de las aspiraciones del profesorado más preparado en las cuestiones pedagógicas. Al apreciar los programas y métodos se notará en las opiniones de los autores de esos informes cierta falta de unidad de criterio, debido a la variada organización de las escuelas inglesas, a la independencia del profesorado, y a una división de los grados de los estudios muy diferente de la adoptada en los demás países europeos.

Llamo especialmente la atención sobre la circular que el Consejo de Educación (Board of Education) dirigió en 1909 a los profesores de las escuelas secundarias sobre el método que deben seguir en la enseñanza matemática: coinciden sus prescripciones con las establecidas en las circulares de los ministerios de Instrucción Pública de Ale-

mania, Austria y Francia, que he transcripto en páginas anteriores, y seguramente es la síntesis de las opiniones de los profesores de mayor autoridad técnica en Inglaterra.

Conviene observar que en Inglaterra, lo mismo que en Francia y Alemania, la reforma de la enseñanza científica de las escuelas secundarias respondió a las necesidades de la vida industrial y comercial: si en Alemania el llamado *movimiento de los ingenieros* fué el promotor de la reforma de los estudios secundarios y dió por resultado la *enseñanza realista*, igual fin y éxito obtuvo en Inglaterra el *movimiento Perry* con los principios pedagógicos que caracterizan su método de enseñanza. Los principios de ese ingeniero [1] se difundieron y se aplican con buenos resultados en Inglaterra y Estados Unidos, no sólo en la enseñanza técnica, sino también en la secundaria. Entre los informes que aparecen a continuación referentes a la enseñanza inglesa, figura la transcripción de un capítulo de una interesante memoria del ingeniero señor Gaztelú [2] titulada *La enseñanza matemática en las escuelas técnicas inglesas:* se encontrará en ese capítulo una clara explicación sobre los métodos que Perry preconiza para la enseñanza de las matemáticas elementales. El señor Gaztelú conoce a fondo la enseñanza inglesa y el método de Perry, pues fué en misión, y como delegado al V Congreso internacional de matemáticas reunido en Cambridge en 1912, para estudiar la enseñanza matemática de las escuelas técnicas inglesas: además, dos años después fué comisionado por la Sociedad Matemática Española para traducir al castellano la obra «Matemáticas prácticas» de Perry.

Para la mejor inteligencia de los informes concernientes a la enseñanza de la Geometría, que hacen referencia a los *Elementos de Euclides,* debe tenerse en cuenta que esa obra comprende trece libros: los libros I, II, III, IV y VI

(1) Profesor del Colegio Técnico de Finsbury.

(2) El Sr. Gaztelú, marqués de Echandía, es profesor y director de la Escuela de Ingenieros de Caminos, canales y puertos de Madrid: bajo su inteligente y activa dirección la Escuela ha hecho notables progresos.

contienen la geometría plana, el V trata de las proporciones: los VII, VIII y IX tratan de las propiedades de los números, el X de las cantidades inconmensurables; los XI y XII se ocupan de la geometría del espacio y el XIII comprende diversas cuestiones del plano y del espacio.

I

Circular del «Board of Education» sobre enseñanza de la geometría y del álgebra gráfica en las escuelas secundarias. (1)

Las observaciones hechas por los funcionarios del «Board of Education» sobre la enseñanza de la geometría en las diversas escuelas permiten formular apreciaciones sobre los resultados obtenidos con el nuevo método de enseñanza. La influencia de la reforma es generalmente buena. Sin embargo, si la mayoría de los profesores no se han desligado suficientemente de la tradición euclídea en la que ella tiene de enojoso, algunos han caído en lo opuesto sacrificando completamente, en favor de las aplicaciones prácticas, la enseñanza del método de deducción; este método debiera ser el elemento esencial de la enseñanza de la geometría en la escuela. Queda mucho por hacer para obtener los mejores resultados; sin embargo, hay que felicitarse de que la memoriación ininteligente haya desaparecido. Los conocimientos de los alumnos son, con frecuencia, muy limitados y les falta reflexión, pero la mayoría de ellos comprenden lo que hacen.

La multiplicidad de los métodos de enseñanza para las mismas materias, en las diversas escuelas, facilitan comparaciones que permiten que las unas aprovechen de las experiencias de las otras. Esas diferencias son a veces muy considerables; algunas escuelas recorren en un año

(1) Marzo 1909 — Traducción publicada en *L'enseignement mathematique*, 1910.

el campo de los libros I y II de Euclides, mientras que otras (quizá la mayoría) emplean tres años por el mismo programa.

Si a un trabajo más lento correspondiera un estudio más profundo y un desarrollo más completo de la inteligencia, esto no tendría importancia; pero en general ocurre lo inverso. Esto no proviene del mayor o menor número de horas asignado a la enseñanza, sino de los métodos empleados, métodos cuyas bases emanan de concepciones diferentes sobre el programa necesario para la primera enseñanza.

Cada vez más es necesario penetrarse de la idea de que la geometría de Euclides (tal como generalmente se encara) sólo comprende un campo muy restringido en condiciones de ser tratado en todas las escuelas secundarias. Las razones por las cuales todavía no se hace se deben al sistema de enseñanza de los primeros elementos. Esta circular tiene por fin principal llamar la atención sobre la cuestión.

La comprensión de la materia requiere que la enseñanza sea dividida en tres grados sucesivos, correspondiendo a lo que se hace en las escuelas en que el estudio es lento.

El 1.er grado trata de las nociones geométricas fundamentales y se titula generalmente: ejercicios prácticos preliminares;

El 2.o grado considera algunas concepciones fundamentales de la geometría;

El 3.er grado comprende un estudio más completo de éstas y además la introducción de la deducción.

Para realizar obra útil, es a veces indispensable entrar en detalles, insignificantes en apariencia; pero, precisamente son esos detalles los que constituyen la base de la mayor parte de las dificultades que los profesores hallan en su enseñanza.

Primer grado

Se reconoce generalmente que la primera enseñanza de la geometría debe tener por fin familiarizar con las nociones geométricas fundamentales, sólidos, superficies, líneas, puntos, dirección, ángulo, etc., e iniciar en el uso de los instrumentos de geometría. Por lo tanto, debe consistir principalmente en observaciones y ejercicios prácticos. La diversidad de las opiniones sobre la elección de los temas, y el desarrollo que a éstos debe darse en este primer estudio, se debe principalmente a una idea demasiado confusa del fin propuesto y de sus relaciones con el estudio « teórico » que debe seguir. Este primer grado es con frecuencia desmesuradamente largo, sin resultados patentes, siendo desarrollado el estudio teórico independientemente del resto. Estos escollos se evitarían por una conveniente correlación entre la teoría y la práctica.

El fin de este primer estudio es la completa comprensión de las nociones fundamentales de la geometría. La familiarización con las construcciones geométricas y la habilidad en el empleo de los instrumentos son, en él, consideraciones de orden secundario más fácilmente alcanzadas ulteriormente cuando lo exija la comprensión de las proposiciones geométricas.

La mayor parte de los profesores están de acuerdo sobre el método de enseñanza de las primeras nociones, es decir, nociones sobre los sólidos, superficies, líneas y puntos, asociando en ellas las ideas de volúmenes, áreas y longitudes. Esas nociones se dan naturalmente sin definiciones, introduciéndose éstas solamente más tarde, cuando el alumno tiene una concepción clara de lo que debe definir. La definición podrá entonces ser un buen ejercicio de composición. Lo esencial es dar una idea clara del sujeto y obtener un exacto empleo de los nombres.

Pueden servir con éxito, al principio, cuestiones como la siguiente: «¿Cuántas medidas se necesitan para describir esta caja?» Se llega así fácilmente a la noción de las

tres dimensiones de un sólido. Se continuará con ejemplos variados y concretos de los cuales algunos a primera vista parecen constituir excepción (una pelota, un lápiz), en que dos dimensiones son numéricamente iguales; se comparará con el número de medidas necesarias para dar las dimensiones de un piso, o las de una página de un libro (en oposición a una hoja), y ésto hasta hacer la distinción geométrica clara entre los sólidos y las superficies.

Para el efecto convendrá plantear cuestiones tales como: «¿Cuántas caras, aristas, vértices, tiene un cubo, un cilindro, un cono, etc.?»

El estudio práctico consistirá sobre todo en la construcción de sólidos de cartón, y en dibujar los mismos cuerpos en posiciones simples.

Los adjetivos calificativos (plano, curvo, recto) podrán igualmente ser empleados. Definir la palabra *recta* sería una pérdida de tiempo; los alumnos estarán generalmente familiarizados con la noción de superficie plana y bastará que no se haga un uso incorrecto de esos términos. El tiempo que debe consagrarse a esta primera parte y el desarrollo que en ella se dé a las construcciones depende naturalmente de la edad de los alumnos. Para niños habría que limitarse al empleo de cartones dejando de lado la parte abstracta del asunto. Para alumnos de más de 12 años la parte abstracta es la más importante, debiendo limitarse el trabajo manual a la construcción ocasional de un sólido hecho a domicilio. Es superfluo dar indicaciones para la construcción de las figuras planas (cuadrados, triángulos, etc.) que están comprendidos en la construcción de un sólido, pues fácilmente las encuentran los mismos alumnos, y tales indicaciones sólo servirían para distraer la atención del punto principal: el sólido.

No debe olvidarse que este trabajo es común, al principiar la enseñanza matemática y científica, y debe evitarse, sea una repetición inútil de los mismos sujetos, sea una diferencia demasiado radical de método.

Viene en seguida la noción de dirección: rara vez es tratada como corresponde, resultando así más tarde dificultades al tratar los ángulos y las paralelas. La dirección es tan difícil de discutir y aun más difícil de definir, del punto de vista abstracto, que el color.

Del mismo modo que los alumnos adquieren la noción de los colores observándolos y nombrándolos, adquirirán la noción de dirección, de una manera clara, observando y designando ciertas direcciones fundamentales tales como vertical, norte, sud, etc.

Al principio se evitará el uso de la representación sobre el papel. Se introducirá la cuestión así: «Muestren ustedes una línea vertical: ¿cómo verifican ustedes si es o no vertical?» lo que conduce al conocimiento de la plomada. En seguida: «muestren ustedes una línea horizontal: ¿cómo verifican ustedes que es horizontal?» Esta verificación debe ser independiente de la vertical, lo que sugiere la idea del nivel de agua.

Viene después la cuestión: ¿Pueden dibujarse líneas verticales sobre el muro, sobre el pupitre, sobre el piso? y lo mismo con relación a las horizontales.

Después: «¿Cuántas líneas verticales pueden trazarse por un punto?» «¿Cuántas horizontales?» y así sucesivamente para las diferentes direcciones (norte, sud, este, oeste). Los alumnos buscarán la orientación de las ventanas de la sala y su propia posición en ella.

El profesor podrá en seguida plantear la siguiente cuestión: «¿Todas las líneas verticales tienen la misma dirección?», y lo mismo para las horizontales: conducirá así a la comprensión de las paralelas como líneas de la misma dirección.

El profesor no deberá tolerar, y menos aun practicar el empleo inexacto de las palabras, por ejemplo: perpendicular por vertical; plano por de nivel u horizontal: se asegurará de que los alumnos no tienen la idea que la dirección del norte pueda ser otra cosa que una horizontal.

Viene en seguida la noción de ángulo. Generalmente se trata de una manera bastante satisfactoria; sin embargo, se presentan a veces dificultades debidas en parte a una insuficiente noción de la dirección y en parte a una prematura representación de los ángulos sobre el papel. Con ventaja se podría no solamente considerar la rotación de una línea o de una de las piernas del compás, tal como se hace generalmente, sino también la rotación de una persona sobre sí misma, o de la tierra sobre su eje. Cuestiones sencillas tales como: «¿De qué ángulo gira usted a la orden, a la derecha?» ayudarán mejor para una concepción clara del ángulo que un gran número de ejercicios hechos con el trasportador sobre el papel. Alumnos que debieran saber todo lo que concierne a los ángulos con frecuencia se encuentran embarazados para contestar a la cuestión: «Un hombre se dirige hacia el norte gira 40° a la derecha, dibújese el recorrido». Muestran así que la preocupación de los números les ha impedido darse cuenta del sujeto principal.

Adquirida la noción de ángulo, estimarán ángulos por comparacion con el ángulo recto o la circunferencia entera antes de aprender a servirse del trasportador: también, cuando midan un ángulo con el trasportador, deberán habituarse a estimar aproximadamente el valor angular: evitarán de este modo errores groseros debidos a una falsa lectura del trasportador.

Los ejercicios de medida de ángulos trazados al acaso, deberán dejarse de lado; para el profesor son difíciles y largos de verificar y ventajosamente pueden reemplazarse por la medida de ángulos obtenidos por la construcción de triángulos. Lo mejor es proponer problemas tales como: «Construir un triángulo cuyos lados son... y medir el mayor de sus ángulos». El profesor conoce la solución, y fácilmente puede verificar el trabajo de cada alumno, y para éstos, es preferible no tener que preocuparse únicamente de la dificultad del manejo del trasportador.

Las nociones fundamentales que corresponden al primer

grado son tratadas de esa manera. Sin embargo, es de uso corriente introducir todavía un gran número de ejercicios prácticos, que comprenden no solamente la construcción de triángulos, la investigación de la altura y de distancias, sino también de bisectrices de líneas y de ángulos, de dibujos de tangentes al círculo, y aun, a veces, de problemas de semejanza, ésto antes de hacer ningún ensayo de estudio de la geometría como ciencia propiamente dicha. Con frecuencia se consagıa un año, y a veces dos, a este estudio. Generalmente puede considerarse como tiempo perdido. Cuando este estudio se hace antes del estudio teórico, las construcciones difíciles fácilmente se transforman en recetas y las más fáciles en diversiones o entretenimientos con el compás. En el caso en que se desee mayor práctica en el dibujo geométrico, mejor podrá adquirirse dibujando planos, elevaciones, secciones de sólidos simples, ejercicios que desarrollan la imaginación geométrica, pero que son independientes de la geometría deductiva. A menos que este estudio haya comenzado en una edad excepcionalmente tierna, no hay razón para que los principios fundamentales adquiridos no se apliquen directamente al desarrollo teórico de la materia, acompañado de apropiados ejercicios.

Hay todavía dudas sobre la oportunidad de las definiciones, de los axiomas y de los postulados. Son raros los profesores que particularmente hayan estudiado esta cuestión, y las indicaciones de los tratados usuales son poco satisfactorias. Las definiciones pueden considerarse como un fin en sí mismos, y es quizá útil hacer que los alumnos formulen definiciones de cosas que ya conozcan, como un cuadrado, un círculo, un plano. La memoriación de definiciones obtenidas inteligentemente y expresadas bajo una forma elegante tiene valor ciertamente; pero esos no son más que fines secundarios, y de ellos no dependen los progresos en geometría. Ciertos términos son indefinibles, como, dimensión, dirección y quizá ángulo, y deberán ser tratados como ya se indicó. Gran número de términos

tales como adyacentes, alterno, exterior, diagonal, obtuso, agudo, pueden incidentalmente introducirse y no requieren definición; basta no permitir que de ellos se haga falsa aplicación. Cuando el profesor habla de un segmento, es necesario que el alumno no se figure un sector, ni que confunda los términos inscripto y circunscripto. Las explicaciones necesarias fácilmente se harán por medio del dibujo. Nada nuevo aprenderá el alumno con esas definiciones y, salvo quizá para algunas del primer grupo mencionado, no experimentará la necesidad de tenerlas bajo una forma explícita. Sin embargo, ciertas nociones podrán ser definidas a priori, y ésto de diversas maneras. Por ejemplo, la elipse puede definirse como la sección de un cono o por las propiedades de los focos y directriz, o también de las dos distancias focales, etc.; definiciones que, a primera vista, no parecen conducir al mismo resultado.

Como base de toda demostración es esencial tener una definición determinada (cuya elección es una pura convención) y a ella limitarse hasta el momento en que se hayan deducido las demás propiedades que igualmente hubieran podido recurrir como definición. El paralelogramo puede definirse de varias maneras: por sus propiedades de paralelismo, por la de igualdad de los lados opuestos, o por la de igualdad de los ángulos opuestos. Para hacer una demostración que se refiera al paralelogramo, o para demostrar que una figura dada es un paralelogramo, el alumno debe saber exactamente lo que puede suponer conocido, y lo que debe demostrar: es pues indispensable convenir una definición particular. Las definiciones cuyo imperfecto conocimiento puede impedir el progreso del alumno en geometría son aquellas cuya elección es solamente una cuestión de convención, como la del paralelogramo. Todas las demás pueden ser empleadas o excluídas a voluntad, porque no son indispensables.

Menos todavía son necesarios los axiomas, y es quizá preferible dejarlos de lado. Por razones diversas es así,

tanto para los axiomas generales como para los geométricos.

El enunciado abstracto: « Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí » en nada ayudará al alumno que tenga dificultad de comprender que si A = B y B = C, se deduce que A = C. Para que absolutamente la realice es preciso que esta conclusión le aparezca como una cosa evidente, sin el auxilio de ninguna autoridad exterior. Del mismo modo, si un alumno no se da cuenta del hecho: si $2x = 10$ entonces $x = 5$, no se le convencerá con la mención de un axioma. Puede ser un ejercicio interesante formular tales axiomas, pero no necesario para adelantar en geometría y, impuesto en este período de los estudios puede llegar a ser un serio obstáculo para el progreso (tanto más que este género de trabajo es antipático a la mayor parte de los alumnos).

El caso es aún más grave para los axiomas geométricos. No solamente no son necesarios para la concepción de los teoremas y demostraciones presentados de una manera conveniente al alumno, sino que bajo la forma dada por Euclides, todavía en uso, no son ni suficientes ni necesarios para la edificación de la geometría. Por lo demás, el estudio de los axiomas ha dado origen a una nueva rama de la ciencia, rama llena de dificultades y de puntos delicados, sólo familiar a un pequeño número de sábios, los cuales aún no están de acuerdo. Esto no entra en el cuadro de la comprensión, ni en el campo natural de actividad de los alumnos. Sin embargo, continuar enseñando que toda geometría se funda sobre los axiomas de Euclides, sería tan falso como inútil.

Segundo grado

Adquirida la noción de ángulo, pueden introducirse los teoremas fundamentales que se refieren á los ángulos y, como consecuencia natural, la igualdad de los triángulos, agregando gran número de ejercicios, principalmente la

construcción de triángulos con diversos datos y la resolución de problemas referentes a alturas y distancias por medio del dibujo. Deberá comenzarse a exigir el cuidado y la corrección del dibujo. Es por comparación con los resultados numéricos que los alumnos aprenderán a apreciar el valor, no sólo de un trabajo exacto, sino también el que corresponde al empleo de buenos instrumentos.

No son solamente esas las únicas ventajas de ese estudio; primeramente hay que hacer observar que tres datos son necesarios y suficientes para determinar un triángulo. Las cuestiones de alturas y distancias (en los casos que no sean demasiado simples) constituyen también muy buen ejercicio de desarrollo, sea de la imaginación, sea de la facultad de comprensión y de representación gráfica de un hecho.

El segundo grado consiste, pues, en establecer los teoremas fundamentales del primer libro de Euclides 13-15, 27-29, 32; lo mismo que 4, 8 y 26.

Probablemente todos los profesores estarán de acuerdo en que después de adquiridos esos elementos los progresos pueden ser relativamente rápidos, pero que los alumnos pasan precisamente demasiado tiempo, sin satisfactorio resultado, en esos mismos teoremas. En efecto, se les consagra frecuentemente un año entero. Uno de los principales argumentos expuestos en primera línea a favor de este método es el desarrollo de las facultades que él produce; pero en realidad el trabajo subsiguiente es superior en las escuelas donde esos teoremas son tratados más rápidamente.

El orden en el cual esos teoremas son presentados varía con los métodos. Evidentemente la unidad del asunto exigiría que esos teoremas fueran tomados simultáneamente o en dos grupos, tal como ya ha sido indicado; el uno concerniente a todos los hechos fundamentales, el otro a los tres casos de igualdad de los triángulos. El defecto esencial del orden de Euclides, del punto de vista de la enseñanza, es la separación de teoremas estrictamente

ligados, siguiendo así no ya el orden natural del asunto, sino un orden completamente artificial, cuyo fin es facilitar las demostraciones lógicas. La mayoría de los textos actualmente en uso siguen el orden natural; pero algunos no han abandonado completamente el orden poco práctico de Euclides. Sin embargo, aun los autores que siguen un orden natural no se han desligado en absoluto de las dificultades inherentes a las demostraciones euclídeas. Todos se ven obligados a introducir un teorema suplementario (generalmente I. 5) antes del I. 8 destruyendo así la unidad del grupo 4, 8 y 26. Casi todos se sirven todavía de la demostración de Euclides para el teorema I. 13 (su 1.er teorema); demostración que es perjudicial tanto para los profesores como para los alumnos, y que la idea moderna del ángulo ha hecho completamente inútil. Dan igualmente una demostración para I. 29, siendo ésta tan difícil que un texto muy conocido la señaló como de las que deben dejarse de lado en una primera lectura. Todos esos teoremas entran por lo demás en el campo de los conocimientos de los que han seguido el curso preliminar de ejercicios. Esas proposiciones parecen evidentes a los alumnos (preparados por un buen curso preliminar) y las llamadas demostraciones las hacen no más evidentes, sino más oscuras. Es preciso, por otra parte, recordar siempre que Euclides escribió para adultos y no para niños. Comenzar una materia tratando de demostrar a los alumnos lo que, en su opinión, no necesita ninguna demostración es el mejor medio de hacerles creer que todo lo que sigue es artificial e irreal.

Es mejor no abordar las demostraciones euclídeas, es decir, deductivas, hasta el momento en que se haga sentir su necesidad, sea después de los teoremas fundamentales, pues entonces la demostración es una operación natural que no está sujeta a ninguna regla arbitraria o artificial.

De esos teoremas fundamentales dependen todas las deducciones que seguirán: en lo que les concierne, lo esencial no es, pues, analizarlas y reducirlas al número

mínimo de axiomas o de postulados (método de Euclides), sino de presentarlas de tal modo que su verdad sea tan evidente para el alumno como la diferencia entre el negro y blanco, o entre su mano derecha y su mano izquierda. Todo procedimiento que no permita llegar a una noción clara y completa de ésto, es defectuoso, cualquiera que sea su valor lógico, y fatalmente provoca errores groseros en los estudios subsiguientes por defecto de comprensión de los teoremas fundamentales tan laboriosamente demostrados.

Las demostraciones euclídeas de esos teoremas no tienen pues su sitio en el principio de los estudios de geometría, no debiendo concentrarse la atención sobre demostraciones formales, sino sobre la exacta y evidente representación de los teoremas.

El mejor método a emplearse para alcanzar este fin es una consideración de detalles sobre los cuales la opinión de los profesores puede naturalmente divergir.

Sin embargo, la experiencia parece demostrar que lo mejor es proceder del modo siguiente:

Angulos y paralelas — El teorema I-13 no necesita ninguna demostración, por más que los autores no se hayan dado cuenta de ese hecho, razón por la cual el método de Euclides necesitaba una demostración. Euclides consideraba como evidente la posibilidad de la suma de dos ángulos y el hecho de que los dos ángulos A O P y P O B son en conjunto iguales a un ángulo A O B. No podía aplicarlo al caso en que el ángulo A O B vale 180°, pues para él no existía tal ángulo: esto le obligaba a subdividir sus ángulos de la misma manera que si, incapaces de contar más allá de 9, quisiéramos demostrar que $6 + 4 = 5 + 5$: estaríamos entonces en el caso de decir $6 = 5 + 1$, luego

$$6 + 4 = 5 + 1 + 4$$

y

$$5 = 1 + 4$$

de donde

$$5 + 5 = 5 + 1 + 4$$

y

$$6 + 4 = 5 + 5$$

Tal procedimiento tiene ya poco atractivo para un niño, pero, cuando además cada símbolo, que tiene una significación propia, debe ser reemplazado por tres letras (en un orden determinado) para designar un ángulo, es muy natural que encuentre en ello muchas dificultades.

Por la misma razón I-14 no necesita demostración. Sin embargo, las propiedades deben ser formuladas y su enunciado aprendido de memoria a fin de que puedan servir como instrumento en una argumentación.

El teorema 15 puede ser demostrado sin ninguna dificultad por deducción, pero, es preferible, siendo evidente la propiedad que se quiere demostrar, reservar el ejercicio de la deducción a un caso más oportuno, es decir, en el que la verdad del teorema sea menos evidente, de modo que la necesidad de una demostración se haga aparente.

Los teoremas 27-29 así como el 32 pueden ser representados por medio de la rotación. El método ordinario basado sobre la rotación de una recta es bueno, pero quizá sea mejor todavía conseguir que los alumnos se figuren un hombre marchando a lo largo de una línea quebrada (27-29) o alrededor de una figura (32, corolario 2). Los que se ocupan de investigar los principios que constituyen la base de las matemáticas no están de acuerdo sobre el valor de este método, como método de demostración; para el profesor no se plantea esa cuestión. Para él, el punto esencial, es llegar a que esos teoremas sean comprendidos por sus alumnos, y ésto de la manera más clara y más permanente. Además, presentando así las cosas, las verdades geométricas son asociadas no sólo al dibujo, sino a las circunstancias ordinarias de la vida.

La experiencia demuestra que por este método los teoremas aparecen a los alumnos como hechos naturales de los cuales adquieren el dominio en muy poco tiempo.

Triángulos iguales. — Es opinión de la mayor parte de los profesores que la introducción del procedimiento de superposición en este período de los estudios significa una considerable pérdida de tiempo y mucho fastidio, los que no

son compensados por los resultados obtenidos. En efecto, el examen de los subsiguientes trabajos de los alumnos revela con frecuencia errores muy groseros que demuestran que la impresión producida por esos estudios ha sido muy superficial.

La igualdad de los triángulos puede ser tratada con éxito como sigue: El profesor dibuja *un* triángulo sobre el pizarrón y pregunta: «¿Qué elementos de este triángulo deben medirse para poder reproducirlo?» Sigue la construcción paso a paso del segundo triángulo poniendo en evidencia la propiedad de que tres medidas (convenientemente escogidas) lo determinan sin ambigüedad. Este procedimiento es evidentemente el mismo que el de superposición, pero la construcción gradual de la segunda figura es fácil de seguir y el hecho de que tres condiciones determinan un triángulo se deduce naturalmente; mientras que la comparación de dos figuras ya dibujadas es más difícil de efectuar y de comprender para un principiante.

Gracias a este método, algunos minutos bastan a una clase para comprender los tres teoremas, de igualdad, lo que permitirá insistir inmediatamente sobre su utilidad. Los alumnos aprenderán naturalmente los enunciados de esos teoremas. En caso necesario, más tarde se darán esas demostraciones clásicas, cuando su estudio ya no presente para el alumno las mismas dificultades.

En el segundo grado, es decir en la presentación de los teoremas fundamentales así condensados en algunas lecciones, será preferible no interrumpir el orden de los estudios con problemas teóricos. Por lo contrario, será necesario que se hagan ejercicios prácticos, especialmente sobre cuestiones de alturas y distancias; pero todo estudio de deducción será dejado de lado hasta que los alumnos hayan adquirido la completa posesión de los teoremas fundamentales, instrumentos que permitirían resolver los problemas que seguirán. Intercalar problemas teóricos (salvo quizá uno o dos sobre los ángulos después de la 1.ª parte y antes de la 2.ª concernientes a su igual-

dad), tiende más bien á debilitar la impresión que es esencial que produzcan esos teoremas.

Tercer grado

Hasta este momento el estudio de la geometría debía estar basado únicamente sobre una observación minuciosa de cosas familiares, sobre la experiencia y sobre la intuición directa: bases que reemplazan las definiciones, postulados y axiomas geométricos de Euclides así como su manera de tratar ciertos teoremas.

De aquí en adelante, aunque la intuición y la experiencia sean todavía utilizadas para encontrar los teoremas, se agregará una demostración deductiva absoluta, basada sobre los teoremas fundamentales precitados.

Es inútil hacer largos desarrollos sobre este período que debe ser el desarrollo general de la deducción a continuación de los teoremas fundamentales. Las diferencias entre una buena y una mala enseñanza permanecen naturalmente muy grandes, pero los métodos no pueden diferir de una manera esencial. Algunos puntos, sin embargo, merecen ser destacados. Cada dominio nuevo será, en lo posible, acompañado de un trabajo personal. Nuevos teoremas serán sugeridos por medio de problemas. El estudio de los teoremas clásicos no deja de ser el fin, pero serán aprendidos más fácilmente y con más interés si sus demostraciones han sido previamente descubiertas.

En lo posible, los teoremas serán considerados por grupos.

Con frecuencia, en lugar de presentar en una clase un teorema completamente enunciado que sólo falte demostrar, será posible plantear cuestiones que conduzcan a los alumnos a enunciar ellos mismos el teorema. Por ejemplo, en lugar de decir: « Demuestre que si la diagonal de un « paralelogramo es bisectriz del ángulo, la figura es un « rombo », será mejor preguntar: « ¿Es cierto que la dia- « gonal de un paralelogramo es bisectriz del ángulo? ». Obtenida la respuesta se continuará:

«Para que eso suceda, ¿de qué género debe ser el paralelogramo?» Después de la contestación: «Dé usted la demostración». De la misma manera se preguntará: «¿Cuál es la relación entre los lados opuestos de un paralelogramo?» más bien que enunciar el teorema siguiente: «Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales». Este procedimiento facilita la investigación de la demostración y, lo que es más importante, desarrolla la observación y la imaginación de los alumnos y los conduce a considerar los diferentes casos posibles en una figura.

A manera que progresan los estudios se hace más importante el conocimiento de los teoremas mismos que su demostración.

En los repasos convendrá decir: «¿Qué teoremas emplea usted para demostrar tal o cuál teorema? Es un criterio eficaz de los conocimientos y eso ayuda al mismo tiempo a formar con el conjunto un edificio lógico.

Los ejercicios no deben considerarse como un fin. Su importancia varía con las materias, y es máxima cuando debe ser asimilada una nueva noción. Así cuando se introducen las nociones de lugares geométricos, envolventes, proporciones, semejanza, los ejercicios tendrán una importante aplicación. Aparte de eso, cuando los primeros elementos de la materia han terminado, disminuye la importancia de los ejercicios y la atención se llevará en primer término sobre el desarrollo de la potencia geométrica y lógica.

Es preciso reconocer que si el estudio de una materia no desarrolla la facultad de resolver nuevos problemas, aquél es inútil. Aún en el caso de que los examinadores continuaran en aprobar a los candidatos que se limitan a repetir las demostraciones que han aprendido acompañados de definiciones, los profesores no debieran mostrarse satisfechos; la única prueba válida de adquisición de los conocimientos es la facultad de aplicarlos a nuevas cuestiones.

Los problemas que introducen nociones nuevas y que

deben considerarse en primer término son los que utilizan la igualdad de los triángulos, bien entendido, con los teoremas fundamentales sobre los ángulos y las paralelas. Casi todos los alumnos pueden aprender a resolverlos y hasta allí ninguna otra cosa es digna de llamar su atención.

Es muy importante cultivar el hábito de considerar las modificaciones sucesivas de una figura: «¿Qué sucede a las diagonales de un paralelogramo si varía el ángulo comprendido entre los lados adyacentes?» «¿Qué sucede a la distancia entre dos puntos cuando uno de ellos se mueve a lo largo de una circunferencia?» y lo mismo para la cuerda de un círculo a medida que se aleja del centro, etc.

Esto es especialmente importante en lo que concierne a teoremas que se prestan a errores cuando sólo la memoria es la que interviene, por ejemplo, para los que se refieren a los rectángulos obtenidos por la intersección de las cuerdas de un círculo o los referentes al cuadrado construído sobre el tercer lado de un triángulo. La noción de cambio o de movimiento debe ser introducida lo más frecuentemente posible. Es lo que constituye una de las superioridades de la idea moderna de la tangente sobre la de Euclides. Es igualmente por esta razón que la investigación de los lugares geométricos es tan buen ejercicio.

En lo posible, será necesario que los ejercicios sobrepasen la teoría. Del mismo modo que las alturas y distancias se resuelven gráficamente mucho tiempo antes de obtenerlas por la trigonometría, así también se darán lugares geométricos y envolventes a trazar, sin inquietarse de saber si resultaran rectas o círculos, o si pertenecen al programa recorrido en la teoría. Este trabajo es útil no solamente del punto de vista educativo, sino porque aporta un nuevo instrumento de operación.

Con frecuencia los mejores ejercicios son los que se hacen sin instrumentos, o aún sin papel, ni lápiz. Para contestar a la pregunta: «¿Son iguales las diagonales de

un paralelogramo? ». No es necesario dibujar laboriosamente muchos paralelogramo exactos. Basta con esquizar algunas o lo que es mejor, representárselos mentalmente.

El defecto de los cursos de geometría de muchas de las escuelas, es de limitarlos exclusivamente a la geometría de dos dimensiones. Aún cuando la geometría de los sólidos no debe ser tratada, conviene aprovechar todas las ocasiones para disminuir la dependencia del alumno frente a la representación gráfica. Se extenderán así al espacio cuestiones como éstas: « ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos dados, de los puntos situados a una distancia constante de una recta dada y de un punto dado?, etc.». Además se dedicará un poco de tiempo para dar una noción de la geometría de los sólidos cuando los primeros grados de los estudios hayan sido franqueados rápida y convenientemente. El undécimo libro de Euclides tiene la reputación de ser fastidioso y difícil; todo lo que contiene de importante puede ser tratado mucho más rápidamente, sobre todo si se hace uso frecuente de la idea de movimiento de una línea o de un plano. Aún sería necesario introducir el estudio de los sólidos, estudio que se facilitaría mucho por el hecho de que las líneas generales habrían llegado a ser familiares desde el principio.

Gráficas

Actualmente es usual agregar más o menos trabajo gráfico al estudio del álgebra. De este modo se hace entrar un elemento de realidad en una materia con frecuencia muy abstracta e irreal, lo que no puede menos de dar buenos resultados. Es raro encontrar personas que tengan una idea precisa sobre la importancia de ese estudio y sobre las ventajas que de él resultan. Es con demasiada frecuencia considerado como un fardo adicional que sólo encuentra sitio sacrificando otra materia. En gran parte proviene esto de la manera cómo se trata el álge-

bra en los textos, únicos guías de los numerosos profesores no especialistas. El procedimiento habitual consiste en comenzar por determinar puntos aislados, después en investigar las áreas de los triángulos y de las diversas figuras formadas por esos puntos, en seguida en representar ecuaciones de primer grado, llevándolas a las formas reducidas, y en fin en resolver gráficamente sistemas simples, de dos ecuaciones simultáneas. En todo esto no hay gran cosa que tenga una influencia capital en los principios del álgebra ordinaria. La resolución gráfica de ecuaciones simples levanta, con razón, una objeción que a veces expresa el alumno: «¿Por qué emplear procedimientos relativamente complicados cuando el método directo sería más sencillo?» En general no se aplica el método gráfico a las funciones de 2.º grado sino cuando ellas se abordan de una manera general.

Entonces todavía se manifiesta demasiada preocupación por la resolución de ecuaciones que, en su mayor parte, se resuelven con más facilidad algebraicamente. Muy rara vez se enseña a los alumnos que pueden emplear el método gráfico para la resolución de ecuaciones de grado igual o superior al 3.º, o aun de otras expresiones que de otra manera no podrían resolver. Algunas veces, cuando se lleva más lejos el estudio, el fin propuesto es la reducción de la ecuación de 2º grado a la forma reducida, investigación del centro, de las asíntotas y de los ejes. Entonces ese estudio es considerado no ya del punto de vista del álgebra elemental, sino del de la geometría analítica; de tal modo que, en la forma como es presentado en la mayor parte de los textos, no es otra cosa que un capítulo prematuro de la geometría analítica. En este caso se puede, con justicia, considerar el trabajo gráfico como un agregado al estudio ordinario y que no influye nada o muy poco en hacer éste más fácil o más inteligente, valiendo quizá más dejarlo de lado. Existe, sin embargo, un medio mejor, aparentemente poco conocido por los profesores. Para exponerlo completamente,

sería menester no contentarse con agregar un capítulo o dos a los textos existentes, como ya lo han hecho sus autores, sino escribir un nuevo tratado de álgebra. Esto saldría del cuadro de la presente circular; aquí debemos limitarnos a notar algunos hechos resaltantes.

El método gráfico puede ser introducido muy pronto, en el momento de transición entre la aritmética y el álgebra.

La representación gráfica de las estadísticas, si ya no fuera conocida, será explicada y constituirá el tema de algunos ejercicios; se limitará naturalmente a estadísticas que estén en relación con los conocimientos reales de los alumnos.

Los alumnos realizarán experimentalmente la diferencia entre una simple reproducción de una serie de valores discontinuos sin trabazón, como las temperaturas máximas de una serie de días sucesivos, y una gráfica continua que admite el uso de la interpolación.

En seguida debe pasarse de las simples estadísticas a otras cuestiones, tales como:

Siendo de 120 millas la distancia entre Londres y Brístol, ¿cuáles serían las velocidades medias de los trenes que recorren esta distancia en 2, 3, 4... horas? Representar gráficamente los resultados.

Se llevará la cuestión más adelante, continuando a hacer variar el tiempo del recorrido, y como de esta manera, se apartaría de las velocidades reales de un tren, se podrá, para obtener una curva completa, emplear en una de las extremidades las velocidades del sonido y de la luz, y en la otra extremidad las de un ciclista, de un carruaje, de un furgón, de un peatón. Se ve así la utilidad de la expresión algebraica $\frac{120}{x}$ así como todos sus valores representados gráficamente, e incidentalmente se da de una manera simple y eficaz la concepción nueva de infinito y del cero matemático. Otros ejemplos serán suministrados por los problemas de los libros de aritmética, especialmente los del capítulo de las «proporciones».

Esas cuestiones comprenderán naturalmente el caso de proporción directa e inversa (tal como el valor de una suma colocada a interés simple) y el incremento proporcional y los intereses compuestos en que no existe proporcionalidad.

Este método tiene un gran valor para el estudio de la aritmética, pues así la significación de la proporción directa e inversa se pone en evidencia, así como el hecho de que esas relaciones no siempre existen.

Se adquiere así una gran facilidad para el cálculo mental y, lo que aun es más importante, eso obliga a resolver muchos casos de un mismo problema. El alumno así aprende por experiencia que a un trabajo exacto corresponde un resultado gráfico racional y va iniciándose gradualmente en la noción de continuidad.

Una vez que ha sido formulada una expresión algebraica análoga a $\frac{120}{x}$, el profesor podrá dar tales expresiones casi al acaso y dejar que los alumnos las reproduzcan gráficamente. Un buen ejemplo para el principio es $(x-2)(x-4)$ que trae como consecuencia inmediata varias observaciones; la significación de los paréntesis, la ley de los signos de la multiplicación, la representación gráfica de los valores negativos y la extensión de la aplicación del término «x» a los valores negativos. Al principio, vale más no introducir la letra «y» como designación de la función de x.

Los alumnos no dejarán de cometer muchos errores, sea de aritmética, sea de interpretación, pero esas dificultades pronto serán salvadas y una vez que por sí mismos los alumnos hayan experimentado que un trabajo minucioso da curvas continuas, se ha conseguido el triunfo.

Naturalmente se requiere variedad, mientras que los alumnos menos adelantados tratarán casos sencillos, los demás operarán con funciones más complicadas, por ejemplo

$$(x-2)(x-4)(x-6) \text{ o } \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)}$$

Así los alumnos se darán cuenta que pueden representar gráficamente toda función algebraica explícita. Generalmente será mejor atenerse a la forma de factores indicada más arriba; las nociones de aritmética que ella implica son entonces mucho más simples y los alumnos tienen más libertad para aplicarse al trabajo esencial que es el trazado de la curva. Así alcanzan más rápidamente el fin, sea la realización de la continuidad y la comprobación de la racionalidad y del encadenamiento de las leyes de la aritmética o del álgebra.

Este trabajo reemplazará ventajosamente las evaluaciones enojosas y sin significación que se encuentran en el 1.er capítulo de los textos ordinarios del álgebra.

Cuando los alumnos han aprendido a trabajar de una manera satisfactoria podrá preparárseles algunas formas lineales, por ejemplo $2x+5$. Es preferible no comenzar, como generalmente se hace, con tales formas, pues desde el principio es importante que todas las formas sean indiferentemente consideradas como abordables para los alumnos; además, el hecho de que las funciones de primer grado sean representadas por una línea recta hará más impresión si es apoyado por una serie de ejemplos más generales en los que no se considere un solo caso conocido.

Naturalmente, las funciones serán al principio calculadas para valores enteros de x; en los casos simples esto bastará para hacer aparecer la curva. Sin embargo, a fin de afirmar más en los alumnos la idea de la continuidad de una curva y algunas veces de obtener la forma de la curva más completamente, se introducirán valores fraccionarios de x. Podrá preguntarse «¿qué valor tiene la función para $x = 3\ ^1/_2$?».

Después de haber buscado el valor por el dibujo, los alumnos lo verificarán por el cálculo.

Cuando los alumnos hayan dibujado una curva, por ejemplo, $(x-2)(x-4)$, se les hará resolver una ecuación tal como $(x-2)(x-4)=5$. Esto dará nuevas indica-

ciones sobre la tan importante noción de la misma ecuación. La primera solución obtenida será sólo aproximada. De inmediato habrá que verificarla aritméticamente, y la verificación entre el resultado y el que gráficamente se obtenga de la curva permitirá conocer el sentido del error. Podrá ser necesario, sea dibujar nuevamente la curva, sea aun dibujarla a otra escala; los mejores alumnos deberán llegar a un resultado aproximado hasta el segundo orden decimal. Esto viene a incluir ejercicios aritméticos sobre las fracciones y los decimales, así como sobre la aproximación en las medidas y en el dibujo. Los alumnos más adelantados podrán así resolver algunas ecuaciones de un grado igual o superior al 3.º, dándose así cuenta de la potencia del método de que disponen.

Todo esto podrá hacerse muy bien desde el principio o independientemente de la enseñanza ordinaria del álgebra. Así los alumnos evidentemente llegarán a dominar las nociones esenciales del álgebra, sea la coherencia en los resultados y por consiguiente la racionalidad de las leyes fundamentales y la significación de las ecuaciones.

El trabajo gráfico nada más comprenderá, pues no debe ser un fin, sino un medio. Todos los métodos particulares, la reducción a formas especiales o la consideración profunda de casos especiales debe ser aplazada para más adelante.

Al pasar, indicaremos que es mejor no hacer las primeras construcciones gráficas sobre papel cuadriculado. Al principio los alumnos se servirán de papeles lisos o de pizarrones y marcarán las medidas por apreciación o por medio de una regla graduada. Después, cuando la idea directriz sea bien clara en su espíritu, se les iniciará en el uso del papel cuadriculado como medio simplificador.

Una vez adquirido el método de representación gráfica, será recordado de tiempo en tiempo por algún ejercicio, generalmente una ecuación por resolver; su utilidad es igualmente notable en álgebra.

Puede darse un ejemplo que mostrará mejor la manera

cómo puede tratarse un punto considerado como difícil, el de los índices fraccionarios y negativos. El empleo de los gráficos para el cálculo de los logaritmos es actualmente bastante general, pero la utilidad de su aplicación, en este período más precoz, rara vez ha sido reconocida.

Supongamos que se trate de iniciar a una clase en la extensión de la noción de índice. Si el profesor dice a sus alumnos: «Tracen la curva 2^x», éstos buscarán naturalmente los valores para x iguales a 2, 4, 8, 16, etc., y reunirán seguramente los puntos correspondientes por medio de una curva.

Esto sugerirá de inmediato la pregunta: «¿Con qué derecho traza usted esa curva, que significa $2^{1,5}$?». Esto no tiene significación, pero la curva le da un valor, sea 2, 8. Preguntad en seguida de dónde puede provenir una expresión tal como $2^{3/2}$, sea tomando la raíz cuadrada de 2^3. Este resultado corresponde al valor dado por la curva. Se tomarán igualmente otros casos tales como $2^{5/2}$ y $2^{4/3}$.

Observemos en seguida que la curva se detiene bruscamente en $x = 1$: hasta aquí las curvas no se detenían bruscamente. ¿A dónde parece dirigirse?; evidentemente no al origen: ésto conducirá a la consideración de 2^0, después de 2^{-1}, etc.

Este método dará a los alumnos una idea firme y precisa de la racionalidad de la extensión de las definiciones, idea que rara vez se obtiene por los métodos ordinarios, y permitirá así no abordar todavía las demostraciones que prueban que las nuevas definiciones se conforman con las leyes de los índices; demostraciones que los alumnos encuentran difíciles en este período de sus estudios y que por consiguiente son poco convincentes y psicológicamente falsas.

Establecida la significación de los índices fraccionarios y negativos, los alumnos pueden trazar las curvas 10^0, $10^{1/4}$, $10^{1/2}$, $10^{3/4}$, 10, y emplear sus gráficos en la investigación de los índices de las potencias de 10 que dan los números naturales: obtendrán, pues, los elementos de una

tabla de logaritmos. La exactitud puede fácilmente ser llenada hasta la 2.ª cifra decimal. Será entonces fácil introducir el uso de las tablas de 4 decimales.

Del mismo modo, cuando las expresiones de 2.º grado son consideradas simultáneamente, se agregará a ellas su interpretación gráfica. La forma $xy = c^2$ será ya familiar. La forma $x^2 + y^2 = c^2$ deberá ser interpretada. Generalmente no será necesario ir más adelante. Sin embargo, se tratará todavía el principio de tangencia dependiente de la igualdad de las raíces, así como el caso más extenso de intersección por puntos reales e imaginarios, pues sin ésto, el capítulo ordinario sobre las raíces de las ecuaciones de 2.º grado es fastidioso y sin objeto, no teniendo ningún contacto con la experiencia.

*La adquisición profunda y precoz del hábito de la re*presentación gráfica facilita ampliamente los principios de la trigonometría y de la mecánica. En cuanto concierne al álgebra elemental queda indicado todo lo que tiene un valor real.

Resumen

Primer grado — Familiarizar con las nociones geométricas fundamentales y llegar a una concepción clara de ellas, y esto por la observación de los hechos ordinarios de la vida y por medio de ejercicios prácticos. El desarrollo y el grado de exactitud de esos trabajos prácticos deberán naturalmente inspirarse en ese fin.

Las materias a tratarse son: los sólidos, superficies, puntos, volúmenes, áreas, longitudes, dirección, ángulo, paralelismo.

Los ejercicios prácticos de modelos de figuras planas serán dejados de lado: las construcciones serán aprendidas más tarde.

Se evitarán las definiciones, pero se exigirá un uso exacto de los términos.

No se aprenderán, ni siquiera se mencionarán, los axiomas y los postulados.

Segundo grado — Para construir la geometría deductiva, es necesario el conocimiento de ciertos teoremas fundamentales sobre los ángulos, las paralelas y la igualdad de los triángulos, porque él ofrece una base más amplia que la de axioma y postulado de Euclides. Esos teoremas se basarán sobre la intuición y serán acompañados de ejercicios prácticos, aprendiendo con exactitud los enunciados.

El dibujo deberá ser minuciosamente correcto y su precisión verificada numéricamente.

Serán dejados de lado los problemas teóricos.

Tercer grado — Curso lógico de geometría deductiva basado sobre los principios y teoremas fundamentales acompañados de trabajos originales. Nuevos teoremas serán expuestos por medio de los problemas teóricos. Los ejercicios prácticos serán multiplicados cuando haya que asimilar una idea nueva.

El trabajo práctico jamás debe ser un fin, deberá generalmente preceder los conocimientos y, con ventaja, puede ir más allá de lo que debe tratarse en teoría.

El alumno deberá ser puesto en estado de resolver problemas teóricos.

Un curso de geometría de los sólidos es recomendable.

Gráficas

Este trabajo servirá de introducción explicativa al álgebra elemental, y no de introducción a la geometría analítica.

El primer trabajo gráfico, después del trazado ordinario de estadísticas discontinuas, deberá comprender funciones explícitas no lineales que ilustren la naturaleza de las expresiones algebraicas en general.

La resolución de las ecuaciones deberá ser seguida de la verificación aritmética de los resultados.

El trabajo gráfico no debe ser un fin, sino un medio.

Marzo, 1909.

W. N. Bruce,
Secretario auxiliar principal.

II

LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA SUPERIOR DE INGLATERRA

Por el profesor Jorge Wolff, del Gimnasio real de Betzdorf-Kirchen

Con este título publicó el doctor Wolff un interesante informe, después de un viaje de estudio que realizó en 1913 a Inglaterra, con el fin de estudiar los métodos de enseñanza de las escuelas secundarias inglesas. El doctor Wolff fué enviado en misión por la Subcomisión Alemana de Enseñanza de las matemáticas.

Las consideraciones que hace el traductor del informe del doctor Wolff en el extracto del informe que sigue a continuación, excusan todo comentario sobre el mérito y tendencias del trabajo de este profesor. Aunque cronológicamente, y por ser considerado como un complemento de los informes de los profesores ingleses, debiera aparecer más adelante, creo conveniente anteponerlo a esos informes, porque da una idea general sobre la organización general de la enseñanza secundaria de Inglaterra, que se requiere conocer para mejor interpretar las ideas que en los informes siguientes exponen sus autores.

En la primera parte, el autor estudia de una manera general el desarrollo del sistema de educación superior en Inglaterra, pues, para formarse una idea más clara de la enseñanza matemática en las escuelas superiores de varones, y con el fin de explicar porqué existe en Inglaterra tan gran variedad de establecimientos de instrucción, es necesario examinar la forma cuyo sistema de educación se ha desarrollado y transformado en el correr de los años.

Una segunda parte se consagra a la historia de la enseñanza matemática en Inglaterra, explicando las actuales tendencias de reforma, y mostrándonos porque esas tendencias difieren de las que se manifiestan en el continente. Para esas dos primeras partes, desarrolladas con todos los detalles deseables, el autor ha estudiado muy especialmente las publicaciones del « Board of Education » y de la « Mathematical Association » de Londres.

La tercera parte que forma, por decirlo así, el núcleo del informe, se ocupa de la enseñanza matemática tal como se practica actualmente en Inglaterra. Las dos primeras partes no son, en el fondo, más que una introducción indispensable. Aquí el autor se apoya principalmente sobre sus observaciones personales utilizando, cuando lo necesita, los informes ingleses. Ocasionalmente hace comparaciones entre los procedimientos ingleses y alemanes, y esto de una manera tan imparcial como es posible.

En cierto modo, este trabajo puede ser considerado como un complemento de los informes ingleses presentados a la Comisión internacional de enseñanza de las matemáticas, complemento que tiene la ventaja de presentar los casos bajo un aspecto general, formando un todo, pero que, en primera línea, se propone dar a conocer en Alemania las ideas que sobre la enseñanza matemática reinan en Inglaterra. El autor lamenta no haber podido obtener la colaboración de personalidades inglesas para examinar y corregir, si era necesario, las pruebas de su trabajo; la guerra, desgraciadamente lo impidió.

Pasemos ahora a dar algunos detalles referentes a las tres partes del informe.

La primera comprende, pues, una *reseña de la organización de la enseñanza secundaria superior inglesa:* se encuentra en ella informes sobre el desarrollo histórico de esas escuelas hasta 1899 y sobre la constitución del «Board of Education» en 1900, y que en realidad no fué más que la fusión del «Education Departement», y del «Science and Art Departement», ambos fundados en 1856.

El autor pasa en revista los diversos géneros de escuelas existentes en Inglaterra, indicando sus caracteres distintivos y su organización interior. Relativamente a los exámenes, debe señalarse la particularidad de que en Inglaterra son las Comisiones de examen las que determinan los planes de estudios de las escuelas, y no el «Board of Education»; mientras que en Alemania es el ministerio que fija el fin que debe perseguir cada escuela.

De una manera general, se puede encarar la educación del doble punto de vista del desarrollo de la inteligencia y de la formación del carácter. En Inglaterra, es principalmente el segundo de esos puntos de vista que se toma en consideración. A este propósito, el autor hace diversas citas tomadas de obras alemanas e inglesas que permiten establecer una comparación entre las dos maneras de ver, alemana e inglesa.

En la segunda parte, consagrada, como dijimos, *a la historia de la enseñanza matemática en Inglaterra*, es cuestión, desde luego, del desarrollo de la enseñanza matemática hasta 1870. Durante este período Euclides reinaba como dueño en la enseñanza de la geometría. Poco a poco, sin embargo, se inició un movimiento de reforma, estimando algunos autores que el método euclídeo no convenía para los principiantes. Fué entonces, que por instigación del matemático inglés Sylvester, fué creada en 1870 la «Association for the Improvement of the Geometrical Teaching».

Esta asociación, análoga a la que se fundó en Italia en 1867 con la colaboración de Cremona, ha desempeñado un importante rol en el desarrollo subsiguiente de la enseñanza de la geometría. Sus miembros, que se reclutan en todas las partes de Inglaterra, se reunen cada año en Londres, y los resultados de sus deliberaciones se publican en informes especiales. Con el tiempo, el fin perseguido por la Asociación se modificó algo, y, en 1894, tomó el nombre de «Mathematical Association, and Association of Teachers and Studens of Elementary Mathe-

matics», y el dominio de sus trabajos ya no se limitó exclusivamente a la geometría. Se le debe la publicación de muchos informes referentes a la enseñanza del álgebra y de la geometría.

Sin embargo, a pesar de esos esfuerzos para modernizar la enseñanza, la «Mathematical Association» no consiguió decidir a las comisiones de los exámenes a que abandonaran el texto de Euclides para la preparación de las cuestiones de examen. La verdadera reforma de la enseñanza matemática en Inglaterra data de 1900 y realmente fueron los ingenieros y los profesores universitarios los promotores de ese movimiento. Es interesante el hacer constar que en Inglaterra como en Alemania, la cuestión de la mejora de la preparación de los ingenieros ha ejercido una gran influencia en la enseñanza de las matemáticas elementales. El autor ha desarrollado, a ese respecto, los puntos de vista de Perry y de Forsyth, que tuvieron un rol preponderante en la renovación de la enseñanza.

Termina esta segunda parte con una lista tan completa como es posible de los textos ingleses en uso a partir de 1870.

En la tercera parte, que trata de las *condiciones actuales de la enseñanza matemática en Inglaterra*, el autor encara al principio la preparación de los profesores de los diferentes establecimientos escolares, en particular de los profesores universitarios, limitándose a Cambridge, Oxford y Londres que, por lo demás, pueden servir de tipos. A este respecto, nos presenta una vista de conjunto de la organización de los estudios universitarios, tanto del punto de vista de los planes de estudios que del de los exámenes; después examina los medios que están a la disposición de los futuros profesores para efectuar su preparación teórica y práctica. De hecho, concluye, esta preparación es insuficiente actualmente, y con mucha frecuencia la enseñanza de las matemáticas es confiada a profesores que no poseen la necesaria capacidad. Por

lo demás, es ésta también la opinión de muchas personalidades inglesas, como lo atestiguan los informes publicados en Inglaterra sobre esta cuestión.

Hace en seguida mención de algunas obras, muy poco numerosas en Inglaterra, referentes a la enseñanza matemática del punto de vista didáctico y pedagógico. El autor expone los diversos métodos de enseñanza en vigencia: el método euclídeo, el método heurístico, y un tercer método que podría llamarse el método intermediario, que consiste en tomar lo que hay de mejor en ambos métodos.

Respecto de los exámenes escolares, que trata en seguida, debe distinguirse entre los alumnos que estudian las matemáticas consideradas como parte de su cultura general y los que tienen que estudiarlas con especialidad. En esta última categoría pueden incluirse los matemáticos, los ingenieros y los oficiales de la armada y de la marina; pero aquí sólo se trata de los matemáticos.

La cuestión de los exámenes está naturalmente ligada a los planes de estudios. Al respecto, pueden considerarse dos tipos de escuelas principales: la «Public School» precedida de la «Preparatory School», y la «Secondary School» precedida por lo que en Alemania se llama «Volksschule». El autor examina esos diversos géneros de escuelas del punto de vista de su organización y de sus caracteres distintivos. Se ocupa en seguida del sitio que en los programas se asigna a las diferentes ramas de la enseñanza matemática: aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, etc., y del rol que las matemáticas desempeñan relativamente a otras materias de los estudios: física, historia, geografía, dibujo, trabajos manuales, trabajos de exploradores (boys-scouts).

Si se dirige una mirada retrospectiva sobre el conjunto de las condiciones de educación en Inglaterra pueden deducirse las siguientes conclusiones. En ese país el fin principal de la educación es, como ya se ha observado, la formación del carácter. Pero no es por una acumula-

ción excesiva de conocimientos científicos que se trata de formar el carácter del joven inglés; es más bien por la adquisición de cierto bagaje científico por una parte, y la práctica de los juegos y de los sports por la otra, práctica que se considera como un factor importante de la educación. La ausencia de una actividad física suficiente durante los años del desarrollo del joven y el nivel relativamente poco elevado de los conocimientos que de él se exigen no son hechos que favorecen el desarrollo de las facultades intelectuales del pueblo inglés. Las autoridades científicas y las personalidades dirigentes del «Board of Education» se dan de ello perfecta cuenta y hacen esfuerzos para remediar este estado de cosas. La tarea que se han propuesto presenta grandes dificultades, pero los resultados ya obtenidos, en lo que respecta a la renovación de la instrucción, son dignos de elogio. Uno de los mayores inconvenientes del sistema de educación inglés, es la falta de centralización; durante siglos, se desarrollaron independientemente las diversas escuelas, oponiéndose con frecuencia a las tendencias de unificación. Recordemos también la insuficiencia de preparación del profesorado, a menudo incapaces de despertar en sus alumnos el interés y el entusiasmo necesarios. La disciplina deja igualmente que desear y está muy lejos de presentar el rigor que se acostumbra en Alemania. En cuanto al sistema de exámenes, el que prevalecía, antes del desarrollo actual de las escuelas inglesas, pudo tener su razón de ser en una época en que las propias universidades determinaban el fin del trabajo escolar, pero ya no responde a las exigencias modernas, y las modificaciones hechas no han sido siempre muy felices. Menciona también, el hecho de que las matemáticas no ocupan generalmente en los programas el sitio que debiera reservárseles. En otros países ellas son consideradas como una materia principal, aun en los gimnasios; y eso no ocurre en Inglaterra.

Por lo demás esos diversos inconvenientes del sistema

de educación inglés han sido reconocidos en el propio país, y se han hecho esfuerzos para combatirlos.

III

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES EN LAS ESCUELAS PÚBLICAS ELEMENTALES DE INGLATERRA

Por H. J. Spencer, profesor superior del Consejo Bloomfield Road, Wolwich (1)

Transformaciones considerables se han operado en nuestras escuelas durante estos últimos diez años, particularmente en la enseñanza matemática. El antiguo método que consistía en tratar las diversas operaciones de la aritmética por procedimientos puramente mecánicos, imperfectamente comprendidos, ha sido reemplazado por una enseñanza más objetiva en la que la faz práctica desempeña el rol más importante. Pero, esta reforma está lejos de ser completa, pues los antiguos profesores, que tienen 20, 30 o 40 años de experiencia tienen dificultad en conformarse con las nuevas exigencias.

El programa conocido bajo el nombre de Esquema B, y publicado en 1894 por el *Board of Education*, señala ya un progreso sensible sobre los precedentes. A partir de esta fecha, cada escuela tenía que establecer su propio plan de estudios. A pesar de las mejoras que han podido observarse en estos últimos diez años, la enseñanza matemática deja todavía mucho que desear en la mayor parte de nuestras escuelas.

En opinión del autor, las matemáticas en las escuelas elementales debieran, en las condiciones actuales, comprender los siguientes conocimientos:

La aritmética, tal como se encara habitualmente, la aritmética práctica, la geometría simple estudiada experimentalmente, con trabajos de construcción y quizá, en

(1) Extracto de un informe publicado en *L'enseignement mathematique*, 1912,

las clases superiores, algo de trabajo deductivo. Las medidas simples.

El álgebra, en tanto se considere como aritmética generalizada, y en su forma más simple, conduciendo al uso de la ecuación simple para la resolución de problemas de aritmética.

Además, en lo que se refiere al valor y al fin de la enseñanza matemática en las escuelas elementales, debe especificarse:

1. Que el niño debe adquirir en ellas y utilizar inteligentemente las nociones y procedimientos fundamentales relativos a los números. Es la tarea esencial de las escuelas infantiles.

2. Que el niño debe adquirir en ellas la rapidez y la exactitud suficiente en los cálculos para responder a las necesidades ordinarias de la vida.

3. Que debe ser capaz de aplicar los principios de su trabajo matemático a sus necesidades.

4. Que debe llegar a tener un conocimiento suficiente de las operaciones sobre los números y de su aspecto cualitativo, para ser capaz de aprender y de comprender los procedimientos comerciales o industriales, en los cuales podrá intervenir ulteriormente. (Esto de ninguna manera quiere decir que los métodos comerciales o industriales deban enseñarse en la escuela).

5. Que la enseñanza de las matemáticas elementales, por su misma naturaleza, debe suministrar un entrenamiento intelectual completamente especial (investigación, análisis, síntesis, comparación, razonamiento, deducción, inducción).

Los cuatro últimos puntos nos hacen encarar las matemáticas de dos puntos de vista:

a) el aspecto utilitario concerniente a la práctica de todos los días.

b) las matemáticas como entrenamiento intelectual y método de pensamiento.

Las opiniones están divididas en cuanto a estos dos

aspectos. Insistimos, sin embargo, en cuanto al hecho de que el entrenamiento intelectual puede adquirirse en gran parte por medio de un trabajo de un género esencialmente utilitario.

Viene en seguida un programa completo de la enseñanza de la aritmética en las escuelas infantiles y en los grados superiores.

Examinemos ahora algunas dificultades del resorte de la administración escolar.

1. Las clases demasiado numerosas. Algunas clases tienen hasta 50 o 60 alumnos. Ahora, las matemáticas, más que cualquiera otra materia, reclaman una gran atención individual y un continuo cambio de vistas entre el profesor y el alumno, ideal ya difícil de alcanzar en clases de 30 a 40 alumnos.

2. Las exigencias siempre crecientes de los programas. La aritmética y materias relativas (geometría y algo de álgebra), con 2 $^1/_2$ a 5 horas semanales. Hay que agregar las demás materias (inglés, historia, geografía, dibujo, ciencias, trabajos de aguja (para niñas), trabajos manuales o domésticos, música y ejercicios físicos.

3. En las grandes ciudades, el director de la escuela con frecuencia deja de ser realmente un profesor. Tiene demasiadas ocupaciones con su trabajo administrativo. Con frecuencia, el propio personal enseñante debe secundarlo en esa tarea, con perjuicio para la continuidad progresiva tan necesaria en el trabajo matemático.

Pasemos a los defectos referentes a la enseñanza misma.

1. La enseñanza de la aritmética y de la geometría no es bastante concreta. Debe reconocerse, sin embargo, que en muchas escuelas se han hecho tentativas para desarrollar esta faz de la enseñanza (empleo de cartones, ladrillos, papel cuadriculado, piezas, balanzas, etc.); desgraciadamente este movimiento está lejos de ser general. Pero, aún cuando la importancia del trabajo práctico es reconocida, no se le atribuye con frecuencia su verdadero valor y el límite que les conviene. Es necesario que

no se reduzca a la repetición de ejercicios puramente mecánicos.

2. El trabajo oral se practica de un modo insuficiente, si se compara al trabajo escrito, especialmente en los grados inferiores de la Senior School.

3. En muchas escuelas no se presta suficiente atención a algunos principios y procedimientos fundamentales: se las sustituye por reglas mecánicas que contribuyen muy poco al desarrollo intelectual de los alumnos.

4. Generalmente se manifiestan quejas por no relacionarse la aritmética con otras materias del programa escolar. El álgebra, la geometría, los trabajos manuales, las ciencias y la geografía son materias para las cuales esta correlación tiene la mayor importancia.

5. Los programas están con frecuencia sobrecargados de cuestiones inútiles y de observaciones que jamás se encuentran en la práctica.

6. La instrucción de las fracciones ordinarias y decimales se hace demasiado tarde, y no se estudian suficientemente las fracciones decimales; con demasiada frecuencia se convierten en fracciones ordinarias.

7. Debería alentarse a los alumnos a evaluar groseramente sus resultados a priori y a verificarlos de inmediato grosso modo; a que resolvieran sus problemas por un segundo método que sirva de prueba al primero.

8. Durante estos últimos años se ha abusado algo de las representaciones gráficas en algunas escuelas.

Lo que he dicho precedentemente se aplica igualmente en principio, a las Escuelas Centrales (Higher Elementary or Central Schools). En éstas se profundizan más las matemáticas que en las escuelas elementales ordinarias, recibiendo los alumnos una preparación industrial o comercial más efectiva. Por lo demás, esas escuelas difieren según las localidades. En Londres pueden ser clasificadas en tres categorías: unas ofrecen carácter comercial, otras tienen tendencia industrial y otras tienen una tendencia mixta.

El tiempo consagrado a las matemáticas y materias correlativas se distribuye más o menos como sigue: dibujo geométrico, 1 hora; otro dibujo, 2 horas; aritmética, álgebra, geometría teórica y geometría práctica, 5 $^1/_2$ horas; ciencias, 2 $^1/_2$ horas semanales; trabajos manuales 2 $^1/_2$ horas.

La escuela comprende cuatro años de estudio, ingresando en ellas los alumnos a la edad de 11 años, pudiendo variar su número de 30 a 40 por clase. Tienen laboratorios de física y de química, y se dispondrán probablemente talleres para los trabajos de madera y de los metales.

Alrededor de 60 a 70 por ciento de los alumnos llegan a ser hábiles industriales (especialmente mecánicos), algunos abrazan una carrera comercial y el resto se dedica a diversas vocaciones de segundo orden.

En este resumen-sumario, no podemos entrar en lo referente a las diversas materias enseñadas en las Escuelas Centrales, se las encontrará en el mismo informe. Nos limitaremos a hacer algunas observaciones sobre el método de enseñanza de la aritmética y sobre el medio de obtener el mayor partido posible.

Los resultados deben ser adquiridos prácticamente en lo posible, por la experiencia individual de los alumnos. Que se resuelvan al principio los problemas de una manera concreta, en la medida de lo posible, con el auxilio de un material apropiado, a fin de que el niño se encuentre en condiciones de comprender claramente las cuestiones que se le propongan. Tratar esas cuestiones por diversos métodos que se confirmen por sus resultados. Practicar, sobre todo la enseñanza oral. Adelantar el estudio de los decimales. Apoyarse en algunos procedimientos y principios fundamentales más bien que sobre cierto número de reglas fijas. Generalizar gradualmente la aritmética ordinaria: introducir desde temprano el símbolo x y la ecuación algebraica. Utilizar pequeños números. Investigar las correlaciones reales de la aritmé-

tica y de las otras materias. No introducir los demás símbolos sino cuando su necesidad se haga sentir; hacer que los alumnos comprendan toda su utilidad, y desde que empiezan a abandonar por sí mismos los procedimientos concretos, alentarlos para que se sirvan de los métodos abstractos en los diversos dominios de la experiencia.

IV

LAS MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS SECUNDARIAS MUNICIPALES

(Extracto de la memoria que con ese título presentó el profesor Jones director de la Escuela Secundaria Central de Birmingham)

Expone el autor el programa de matemáticas de una de las Escuelas Secundarias municipales, de las cuales existe gran número en Inglaterra: la que considera tiene unos 300 alumnos entre 11 y 17 años de edad. La enseñanza debe tener en ella ante todo un carácter utilitario, debiendo insistirse especialmente sobre los puntos siguientes: exactitud en los cálculos ordinarios; uso de los logaritmos, de la regla de cálculo, etc.; resolución de las ecuaciones de primer grado y de las de segundo grado; conocimiento de las propiedades de las principales figuras geométricas, triángulos, paralelogramos, círculo, e igualmente, hasta cierto punto, de las secciones cónicas; resolución de los triángulos; agrimensura; equilibrio de las fuerzas; dinámica elemental; energía y sus transformaciones; movimiento armónico simple y sus relaciones con el movimiento circular; conocimiento suficiente del cálculo infinitesimal para permitir la diferenciación de funciones simples, pues el cálculo de algunas integrales se encuentra en física, en química, o en los trabajos del ingeniero; y la determinación de máximos y mínimos, de áreas, de volúmenes, de centros de gravedad y de mo-

mentos de inercia; representaciones gráficas. La noción de función especialmente es de primera importancia. Se debería evitar todo estudio que ofrezca un carácter puramente artificial, y buscar más bien la simplicidad que la complicación.

La aritmética y el álgebra son tratadas simultáneamente. Se comenzará de preferencia por las fracciones decimales, pues los alumnos no conocen suficientemente este asunto antes de su ingreso en la escuela. Se continuará por las operaciones abreviadas, abordando después las proporciones y porcentajes. La enseñanza de las proporciones es difícil, y por eso se descuida con frecuencia en las escuelas; se prefiere generalmente el método de reducción a la unidad. Sin embargo, el estudio de las proporciones ofrece un interés particular, pues introduce la noción de relación que, por sí misma, conduce a la noción de función. El empleo de las letras se hará sin demora al considerar problemas que conducen a ecúaciones simples, y como medio de simplificar el lenguaje; después se hará sentir su utilidad, evitando, sin embargo, los ejemplos complicados. En fin, el campo del primer año se terminará por la resolución de los sistemas de ecuaciones, tratando también la cuestión gráficamente. Los logaritmos podrán introducirse al fin del primer año, o al principio del segundo.

El trabajo del segundo año, para la aritmética, consistirá en problemas sobre intereses, descuentos y operaciones financieras diversas, y para el álgebra en problemas variados que conduzcan a la resolución de ecuaciones o de sistemas de ecuaciones. Se tratarán también las ecuaciones de segundo grado, resolviéndolas al principio por el método de descomposición en factores, y los elementos de la trigonometría.

En los años siguientes se tratarán las ecuaciones simultáneas de segundo grado, las potencias y raíces, las progresiones aritméticas y geométricas. Podrán también consagrarse algunas horas a las permutaciones y combi-

naciones, al binomio, a los símbolos e^x y $\log x$. En trigonometría, después de la resolución de los triángulos rectángulos, se pasará a los triángulos en general por medio de las fórmulas

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C.$$

Aunque estas fórmulas bastan para las aplicaciones, será conveniente introducir otras más cómodas para los cálculos logaritmicos. Agreguemos todavía las fórmulas de adición, las relaciones entre las funciones de A, $2A$ y $\frac{A}{2}$, la expresión del área de un triángulo y los radios de los círculos inscripto y circunscripto. En cambio se evitarán las ecuaciones trigonométricas complicadas y en general toda manipulación trigonométrica que presente un carácter más o menos artificial. En fin, deben recomendarse las operaciones prácticas sobre el terreno, agrimensura, levantamiento de planos, etc.

En geometría, el estudio será al principio en gran parte experimental, estableciendo después las demostraciones geométricas de las propiedades encontradas experimentalmente. Durante este primer período se aplicarán sobre todo dos métodos: verificación experimental de deducciones geométricas y demostraciones geométricas de generalizaciones experimentales. El primer año bastará para tratar de esta manera la mayor parte del libro de Euclides. Durante el segundo año los métodos deductivos serán utilizados con más frecuencia; el plan de estudios se extenderá hasta el libro III de Euclides. Los años siguientes, los procedimientos empleados serán todavía más puramente deductivos: los libros IV y V podrán acortarse considerablemente. Se tratarán también las propiedades de algunas otras figuras, por ejemplo, de la elipse, de la hipérbola y de la parábola. Las aplicaciones gráficas serán numerosas y se dedicará además cierto tiempo al di-

bujo geométrico. Las representaciones gráficas ofrecerán un interés especial para ilustrar la noción de función pudiendo servir de base al cálculo infinitesimal. Se estudiarán sobre todo las líneas

$$y = m\,x + c,\ y = \frac{1}{x},\ y = a + b\,x + c\,x^2,\ y = a\,x^n,$$

conduciendo esta última a la curva logarítmica. Se tendrá cuidado de ilustrar este estudio por aplicaciones prácticas tomadas de la física.

El cálculo infinitesimal podría introducirse desde temprano. Algunos profesores prefieren llevar desde el principio el estudio del álgebra y de la trigonometría hasta cierto límite. Sin embargo, el procedimiento gráfico constituye seguramente el método más simple de introducción al cálculo diferencial e integral. Se calcularán después las derivadas e integrales ordinarias aplicándolas al estudio de las curvas, máximos y mínimos, etc. Más tarde se considerará la integral como una suma, lo que permitirá la determinación de áreas, volúmenes, momentos de inercia, centros de gravedad, etc.

A juicio de algunos este plan de estudios podrá parecer algo considerable, pero no debe perderse de vista la gran economía de tiempo que resulta de la supresión de capítulos inútiles.

V

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS PÚBLICAS INGLESAS PARA VARONES

(Informe del profesor C. Godfrey, presentado en el 4.º Congreso Internacional de los matemáticos, reunido en Roma en 1908)

I

. . . .

2. En Inglaterra, el término « escuela pública » tiene un sentido algo especial. Por escuela pública se entiende

generalmente una escuela secundaria, escuela dotada, que instruye jóvenes de las clases superiores y medias, e independiente del contralor del Estado, salvo en el caso de que la Caja pública la subvencione.

Existen otras categorías de escuelas secundarias, no dotadas, sostenidas por impuestos locales; estas escuelas son cada vez más numerosas e importantes, y en muchos casos concurren con éxito con las escuelas dotadas más débiles. Se diferencian de las escuelas públicas en que sus reglamentos están bajo el contralor de una Oficina de gobierno, el *Board of Education.*

3. Las escuelas públicas monopolizan la educación de las clases superiores del país. Siempre se han vanagloriado de la exclusión de todo contralor extraño; cada escuela es administrada por su propio cuerpo dirigente y por su principal, generalmente omnipotente. Esta libertad, en apariencia completa, está restringida por las causas siguientes. En primer lugar, muchas escuelas públicas encuentran oportuno aceptar la ayuda pecuniaria del Estado, lo que impone la inspección del *Board of Education.* Las escuelas más ricas y más importantes están en condiciones de no necesitar ese auxilio; pero, en estos últimos años parte de las principales escuelas, se han sometido voluntariamente a la inspección.

En segundo lugar, a pesar de esta independencia, esas escuelas no son realmente libres; la instrucción está determinada en gran parte por un gran número de exámenes públicos, tales como los exámenes para las bolsas de colegio a las Universidades de Oxford y de Cambridge, los exámenes preliminares para los grados universitarios, los exámenes para los certificados de aptitud expedidos por las universidades, los exámenes de ingreso en la armada, etc.

La función de una escuela en la opinión del público, su poder de atraer alumnos y de abrirse su camino, en gran parte depende del éxito que haya obtenido en esos diversos concursos. Muy pocas reformas pueden hacerse

sin el asentimiento de las autoridades inspectoras. Se verá que la influencia de los cuerpos examinadores ha sido todopoderosa en la enseñanza matemática inglesa.

Este informe concierne a las condiciones que prevalecen en las escuelas públicas. Daremos desde luego una idea de la *organización de la enseñanza matemática.*

4. Una escuela pública está dividida en *clases* («forms»), estando principalmente la clasificación determinada por la fuerza en las ramas literarias como Griego, Latín, Inglés, Historia, Geografía, Escritura Sagrada. Estas materias son enseñadas por el maestro de clase.

Para las matemáticas, un cierto número de clases forman un *grupo* («block») y los alumnos de este grupo están repartidos en *series* («Sets»), según sus aptitudes en matemáticas. Una escuela de 400 alumnos puede ser dividida en 4 *grupos* y un grupo de 100 alumnos puede formar de 4 a 6 series, variando de 25 a 15 el número de alumnos en cada una. Las razones de ese sistema de repartición para las matemáticas son las siguientes: 1.º El maestro no posee generalmente conocimientos muy completos en matemáticas. 2.º Los jóvenes de una misma clase difieren demasiado en sus conocimientos y aptitudes matemáticas para recibir una enseñanza común sin nueva repartición.

El *número de horas* afectado a la enseñanza matemática es de 4 a 7 horas por semana con 1 o 2 horas de preparación fuera de la escuela. Muchas escuelas tienen una sección moderna, en la cual el griego es reemplazado por el alemán, y un suplemento de matemáticas y de ciencias. En clase, gran parte del tiempo es empleado por los alumnos en resolver ejercicios escritos, recorriendo el maestro la clase para auxiliarlos en caso necesario.

Las diversas ramas de las matemáticas, en general, son enseñadas por el mismo maestro; pero, en algunas escuelas existe una organización diferente; los alumnos están agrupados, en una clase para la Aritmética y el Algebra, y en otra, para la Geometría.

Puede agregarse que la misma disposición es corriente para la enseñanza respectiva de las lenguas modernas y de las ciencias.

5. Durante los dos últimos años de escuela, de 17 a 19 años de edad, hay entre los jóvenes una fuerte tendencia a especializarse, siendo generalmente la materia elegida como especial, una de las siguientes: lenguas antiguas, matemáticas, ciencias, lenguas modernas, historia.

Esta especialización precoz es el resultado de los concursos organizados por los Colegios de Oxford y de Cambridge para los aspirantes a las becas destinadas a los que se distinguen en una materia; de modo que un alumno que tenga iguales aptitudes para las lenguas antiguas y las matemáticas, no tendría probabilidad de éxito si se pusiera en competencia con un alumno particularmente preparado en una sola de esas materias [1]. De ésto resulta que un candidato a una beca clásica con frecuencia abandonará todo trabajo matemático y científico a la edad de 17 años.

Del mismo modo un joven matemático con frecuencia, durante sus dos últimos años de estudio, renunciará a toda instrucción literaria; sin embargo, es justo decir que existe gran diferencia al respecto entre las diversas escuelas. En todo caso la concurrencia entre las escuelas para la obtención de las becas tiende a hacer malograr las tentativas de los que encuentran que la instrucción debería ser general hasta el fin de los estudios escolares.

6. Antes de examinar más particularmente las diferentes ramas matemáticas, es conveniente decir algunas palabras sobre las considerables reformas que se han realizado en la enseñanza matemática durante los últimos años. Muchas barreras se han derribado y en diversos puntos se ha modificado la concepción del programa de estudios.

7. Cada rama puede ser encarada de dos puntos de

---

(1) En algunos casos puede obtenerse una beca por una combinación: 1.° de matemáticas y algo de ciencias físicas: 2.° de letras clásicas e historia.

vista, según que se la considere por su valor utilitario o disciplinario. Quizá los maestros están sujetos a fijar su atención sobre el último punto, mientras que la generalidad del público considera el primero como el más importante. No es necesario apoyarse en el hecho de que es un error el considerar sólo uno de esos puntos de vista. Podría sostenerse que casi todas las materias han sido introducidas en los programas a causa de su utilidad práctica.

Sea lo que fuere, hasta hace diez años, las matemáticas parecían ser consideradas en las escuelas como una gimnasia mental. Esta exageración era perjudicial, pues los jóvenes no podían interesarse por una materia enseñada por motivos que les parecían fútiles. Buenos maestros sintieron la necesidad de renovar algo los métodos a fin de modernizar su trabajo. Pero el sistema en vigencia estaba fijado por los programas de exámenes y para todos era evidente que aunque los tiempos fueran maduros para cambios, no podrían éstos realizarse hasta que los maestros y los examinadores se vieran impulsados por la opinión pública.

8. La impulsión necesaria vino de los ingenieros. Ya no son los tiempos en que los ingenieros despreciaban las matemáticas [1], y sólo se fiaban en el buen sentido y en la intuición auxiliados de una gran reserva de seguridad. Dicen actualmente que no pueden saberse con exceso las matemáticas, con tal que sean buenas matemáticas. Un nuevo período se ha abierto para la creación de una sección de ingenieros en la Universidad de Cambridge, sección cuyos diplomados encuentran fácilmente colocaciones al egresar de la Universidad.

Los ingenieros se quejaban de que la enseñanza que se daba carecía de bases prácticas. En 1902, en la reunión de la *British Association*, en Glascow, J. Perry, pro-

(1) Lo que expresa el profesor Godfrey respecto del desdén de los ingenieros por las matemáticas, podrá aplicarse a los ingleses: los latinos en general pecan por exceso en el polo opuesto.

fesor de Mecánica en el *Royal College* of *Science* de Londres atacó el estado de cosas existente.

9. Este movimiento dió por resultado la formación de diversos comités que compararon las opiniones de los hombres técnicos y de los profesores, y encontraron que era posible un acuerdo sobre la mayor parte de los puntos. Los profesores reconocieron que materias útiles podían ser tan educativas como las futilidades convencionales que habían concluído por identificarse con las matemáticas enseñadas en las escuelas. Lo mismo que las matemáticas superiores puras ganan en valor e interés por un contacto más íntimo con los problemas planteados por los físicos, y en cambio se convierten en irreales y sin objeto, cuando ellas se separan de sus aplicaciones, así las matemáticas elementales han encontrado su salvación en la introducción de las aplicaciones innumerables que suministra la vida industrial moderna.

Las Universidades y los cuerpos examinadores consintieron en modificar sus reglamentos y programas para ponerse de acuerdo con las vistas modernas. Se mejoró la situación de las matemáticas, y es quizá posible actualmente exponer un juicio sobre sus nuevas condiciones.

II. — Aritmética

10. Sólo muy lentamente ha llegado esta materia a ocupar una conveniente posición en las escuelas inglesas. Ella era, en cierta época, considerada solamente como un instrumento para la contabilidad y el comercio. El tiempo era empleado, pero sin provecho, en dominar las dificultades del sistema británico de las monedas, pesas y medidas. La Aritmética no se enseñaba en sus verdaderas relaciones con las otras ramas de las matemáticas. Las cuestiones financieras tomaban demasiado tiempo y como podía esperarse, con frecuencia habían llegado a ser demasiado irreales en poder de los maestros de escuela. Un mal mayor residía en la cantidad considerable

de problemas especiales con artificios que recargaban los programas. Todos los problemas propuestos en los exámenes públicos eran coleccionados por los autores de manuales de ejercicios, y elevados por ellos al estado de modelos, en capítulos especiales, y en ellos resueltos por métodos particulares e ingeniosos. Así es como se encuentran en libros de ejercicios corrientes capítulos sobre: «Llaves que llenan y vacían baños», sobre «Carreras y juegos de destreza», sobre «Vacas que pastan campos con perfecta igualdad».

La aritmética sólo se encaraba con menosprecio y se notó, que a la edad de 18 años, algunos jóvenes eran absolutamente incapaces de hacer ninguna aplicación útil de la Aritmética y hasta ignoraban completamente el sistema métrico decimal. La Aritmética que esos jóvenes habían aprendido, inútil para la vida práctica, dependía de una cantidad de artificios particulares, más bien que de algunos principios simples, y era igualmente inútil como medio educativo. Esta materia había llegado a ser tan vulgar, que matemáticos competentes la despreciaban y con frecuencia se encontraban embarazados, frente a cifras y a resultados numéricos. Jamás, bajo ningún pretexto se introducían datos numéricos en la Geometría. Era muy raro encontrar cuestiones numéricas en los problemas de matemáticas superiores propuestas en las Universidades. De esto resulta que los conocimientos del matemático formado por este sistema son casi enteramente *cualitativos:* rara vez le ocurriera buscar una prueba *cuantitativa* a menos que sus ulteriores experiencias hayan corregido los efectos de su educación primera.

11. Las tendencias que caracterizan las *últimas reformas de la Aritmética son:* 1.º Simplificar la materia, desembarazarla de las reglas y expedientes particulares inútiles, suprimir los tipos artificiales de problemas cuyo interés originario ha desaparecido, atribuir menor importancia a la aritmética financiera. 2.º insistir sobre la exactitud y habilidad en las más simples operaciones

con los enteros y las fracciones decimales, insistir sobre la comprensión perfecta de la notación decimal y del sistema métrico, hacer comprender al alumno qué número restringido de principios y de reglas diferentes tiene que adquirir, bastando para el resto fiarse a su buen sentido.

12. Algunos de los mejores profesores han intentado apoyar su enseñanza sobre el estudio de la teoría de la Aritmética, por ejemplo, sobre las demostraciones rigurosas de las operaciones fundamentales, de las fracciones ordinarias, examinando minuciosamente el grado de aproximación de una série de cálculos, etc. Otros, encuentran que si bien tales cuestiones son dignas de mención, son, en este período, en su mayor parte demasiado difíciles por ser objeto de un estudio profundo; preferirían aplazarlos hasta el momento en que el alumno tenga mayor madurez de juicio y tenga suficientes conocimientos de álgebra.

13. El uso de las tablas de logaritmos de 4 decimales empieza a entrar en vigencia. Hace 10 años las únicas tablas que se encontraban en las escuelas eran las de 7 decimales, que se empleaban en la resolución de los triángulos. Estas no eran suficientemente manejables y los jóvenes no tenían de ellas la suficiente práctica para emplear sus logaritmos con confianza. Los profesores de ciencias, sin embargo, reconocieron la utilidad práctica de las tablas de 4 decimales y se quejaron de tener que hacer el trabajo de sus colegas matemáticos al enseñar el uso de aquéllas. Esto ha dejado de ser. Se ha encontrado que un joven de 14 años puede aprender a servirse de las tablas de 4 decimales y que lo hace voluntariamente comprendiendo; de esta manera el campo de las operaciones posibles ha sido muy ampliado.

14. Con el mismo título de Aritmética conviene hablar de dos cosas que con ella se relacionan muy estrechamente. Se trata, por una parte, de la *importancia de los ejercicios numéricos en todas las ramas*, y por otra parte de

la introducción del *trabajo de laboratorio* en la enseñanza matemática.

Importancia de los ejercicios numéricos en todas las ramas. La supresión de las materias inútiles del curso de Aritmética hubiera podido tener el inconveniente de hacer perder al alumno la ocasión de ejercitarse en las operaciones numéricas. Este peligro ha sido evitado por el uso de ejercicios numéricos frecuentes en las otras ramas, más especialmente en Geometría y Trigonometría. En cada rama se insiste sobre la necesidad del contralor numérico aproximado. Esta tendencia se encontrará más lejos con diferentes títulos; bastará decir aquí que esto conduce: 1.º a la habilidad en el cálculo numérico; 2.º a una realización más vivaz de los resultados así ilustrados.

15. *Trabajos del laboratorio de matemáticas,* — En numerosos establecimientos, actualmente, jóvenes de 13 a 15 años, siguen (como si formaran parte de las matemáticas) un curso de trabajos experimentales en un laboratorio. En este curso se les enseña a medir y a pesar. Incidentalmente aprenden a ver las ventajas del sistema decimal, a determinar las superficies y los volúmenes de objetos reales, a determinar las densidades y los pesos específicos, a descubrir las leyes más simples de la hidrostática, etc. La cantidad de conocimientos adquiridos en este curso no es quizá muy grande, pero no hay duda sobre el hecho de que este curso dá una idea práctica de las matemáticas, vulgarizándolas, y que satisface a la necesidad de coordinación del cerebro, los ojos y las manos, necesidad que muchos profesores creen ser inherente a la naturaleza de los jóvenes ingleses.

III. — Geometría

16. *Geometría plana.* — Algunos cambios más se han realizado en la enseñanza de la Geometría. Hace 5 años las Universidades y la mayor parte de los cuerpos examinado-

res exigían la serie de las proposiciones de Euclides. No eran exigidas sus mismas demostraciones; pero ninguna se aceptaba si violaba la serie lógica establecida por el gran matemático.

Esta restricción, desde hacía mucho tiempo resultaba enojosa, y parecía posible perfeccionar la obra de Euclides. La restricción consagraba y fijaba un modo de enseñanza sin vida: el profesor tenía las manos atadas. No había cómo dar originalidad o novedad en la manera de presentar la materia; sin duda se enseñaban muchas cosas buenas, pero la mayor parte de los profesores se contentaban con desarrollar la memoria más bien que la verdadera comprensión de las demostraciones. Consideraban los ejercicios o las «deducciones» como superiores a las fuerzas de los jóvenes.

Las construcciones muy raras veces se hacían con verdaderos instrumentos. La mayor parte de los jóvenes no estaban familiarizados con las nociones sobre las cuales debían razonar; por ejemplo, frecuentemente ocurría encontrar un alumno que habiendo leído todo el libro II de Euclides (área de los rectángulos) no sabía distinguir el rectángulo del ángulo recto.

17. El partido reformador sostenía que una percepción más viva de las formas y de las propiedades de las figuras geométricas era necesaria antes de que tales propiedades puedan ser expuestas lógicamente con provecho. Tanto como el partido conservador, apreciaba la educación lógica que puede suministrar la geometría, pero argüía que si la lógica debe ser algo más que una palabra, es necesario primeramente familiarizarse con el sujeto.

Tomemos como ejemplo el teorema de Pitágoras relativo a los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo. El antiguo método de enseñanza consistía en decir: Ved, pues, un hecho notable: queremos mostraros que es posible partir de los principios más simples, de emplear argumentos que convencerán a los más ignorantes y de llegar finalmente a este resultado extraordinario.

Los adeptos de la nueva escuela, sin dejar de admitir la necesidad y el valor del medio arriba mencionado, sostenían que se requiere algo más. Es, decían ellos, no sólo necesario interesar y conquistar por la fuerza de la lógica pura, sino también inculcar el arte de aplicar la obra de la lógica a nuevas conquistas. En el caso del teorema de Pitágoras la necesidad de una demostración lógica no se hace sentir hasta que el alumno haya sido convencido, por otros medios, de que los hechos son tales como han sido enunciados. Deberá medir los lados y calcular los cuadrados, deberá verificar la equivalencia, cortando y superponiendo figuras de papel (y quizá pesando). Además los hechos no deberán enunciarse crudamente como una cosa que debe verificarse: más bien deberán ser presentados de tal manera que el alumno tenga oportunidad de pensar por sí mismo y de anticipar así los resultados. De todas maneras deberá ser alentado a dirigirse por sí mismo más bien que a seguir.

18. La Geometría era considerada como una materia propia para la experiencia. Para experimentar en Geometría, un niño debe aprender a dibujar y a medir con una suficiente exactitud. Puede también hacer otros ensayos, por ejemplo, cortando y doblando papel, empleando papel cuadriculado, papel transparante, cordón, bloques de madera, etc. Pero, puede difícilmente ir muy lejos sin una práctica suficiente en el manejo de los instrumentos de dibujo. Deberá, pues, en vista de esos ejercicios, tener una regla graduada, un transportador (para medir los ángulos), un compás, una escuadra (para dibujar las perpendiculares y las paralelas).

Estos instrumentos le serán útiles, además, por otra razón. Un problema de construcción no tiene significación si no se especifica cuáles son los instrumentos autorizados. El problema consistente en dividir un ángulo en tres partes iguales, es posible si es permitido servirse de una regla sobre la cual puede señalarse una longitud dada. Pero el problema es imposible con los instrumentos

admitidos por Euclides. Los problemas de construcción no pueden, pues, ser emprendidos inteligentemente sin que el alumno comprenda esas restricciones en el empleo de los instrumentos, y es poco probable que los comprenda, a menos que los haya manejado y se haya servido de los autorizados.

Además, el uso de los instrumentos geométricos satisface las necesidades de actividad física del niño. Reflexionará mejor si sus dedos están ocupados. La acción de dibujar figuras le sugerirá ideas. Su actitud se hace activa en lugar de pasiva.

19. Tales son los argumentos que han sido empleados para justificar el uso de los instrumentos en las escuelas.

No se echó en olvido, naturalmente, que, para muchas profesiones, el dibujo geométrico tiene un valor utilitario, por ejemplo, para los ingenieros, los arquitectos, la navegación y los trabajos militares. Bajo el antiguo régimen, la enseñanza del dibujo geométrico había sido separada del estudio teórico de la geometría, en detrimento de ambas materias. Frecuentemente era enseñado como una rama de las bellas artes, más bien que como una de las ramas de las matemáticas.

Resultando un respeto exagerado por la terminación artística y el lavado y, lo más grave era que el dibujo geométrico sólo consistía en una vasta colección de reglas especiales y sin relación entre sí; era nulo el valor educativo de la materia.

20. Los profesores pedían un sistema de enseñanza geométrica más libre y más experimental, pensando que una familiarización mayor con la geometría aumentaría su valor como medio de educación lógica. Por otra parte, los ingenieros y demás críticos se inquietaban poco de la educación lógica, pero deseaban vivamente que sus alumnos tuvieran algunos conocimientos geométricos, lo que evidentemente no ocurría con el sistema entonces en vigencia.

21. Aunque resultante de puntos de vista distintos, la

necesidad de un cambio definido era demasiado urgente y unánime para que se pudiera resistir. Las universidades revisaron sus progamas de exámenes. La de Cambridge dió el tono de la reforma: 1.º exigiendo el uso de los instrumentos de dibujo; 2.º aceptando toda demostración de un teorema que « a los examinadores pareciera como formando parte de un razonamiento sistemático ». Publicó una lista modesta de teoremas y construcciones que debieran ser considerados como fundamentales. Esta lista suprimiría del tratado de Euclides algunas de las proposiciones menos útiles y menos interesantes. El segundo libro de Euclides (área de los rectángulos) fué reconocido inadaptado para el razonamiento lógico formal, y proposiciones principales fueron introducidas como una « ilustración geométrica de las identidades algebraicas ».

Un paso importante se dió con la introducción de « demostraciones solamente aplicables a magnitudes conmensurables. » El razonamiento de Euclides para las proporciones es vigoroso y comprende todas las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Es del mayor interés para un estudiante adelantado y podría convenientemente figurar en un curso de universidad, por más que un método más moderno en uso para los inconmensurable sería sin duda preferible. Pero, la teoría de Euclides era un tropiezo para los principiantes, y la manera como era generalmente enseñada en las escuelas inglesas la hacía incomprensible, siendo siempre suprimido el libro V.

La universidad decidió que la teoría de las figuras semejantes podría estudiarse en las escuelas sin tratar prematuramente la teoría mucho más difícil de los inconmensurables.

Construcciones hipotéticas fueron sobreentendidas; por ejemplo, para demostrar la igualdad de los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isóceles, se consideró como legítimo emplear la bisectriz del ángulo del vértice, aun cuando la construcción de esta bisectriz con la regla y el compás no hubiera sido todavía expuesta y demos-

trada entonces. Se admite de hecho el teorema de existencia de una bisectriz para todo ángulo. La elección de un método particular para trazar la bisectriz, no es considerada como formando parte de la discusión.

22. El cambio de reglamentación dió libre curso a una gran cantidad de energía latente. Todos los entusiastas sintieron que podían enseñar la Geometría a su manera. Aparecieron muchos textos que representaban todos los tonos de la opinión. Como era de esperarse, muchos de los nuevos desarrollos fueron extravagantes y tuvieron poca duración. Durante un tiempo se manifestó una tendencia a darle un desarrollo práctico y experimental. Pero, pronto se comprendió que esto quitaría toda consistencia a la materia. Debe haber cierto elemento de seriedad en toda rama de estudio, y del punto de vista de la educación general, la Geometría vivirá o sucumbirá según su influencia sobre la educación lógica. Los más empleados de los nuevos textos no diferían del de Euclides en su modo de exponer y de agrupar los teoremas. En cuanto a la parte experimental algunos libros la restringían a una introducción, mientras que otros preferían desarrollar las experiencias y las teorías simultáneamente. En todos los casos las construcciones debían hacerse con instrumentos; se recurrió ampliamente a los datos numéricos y a variados ejemplos. Respecto a la sucesión de los teoremas, ningún sistema que pueda llamarse revolucionario obtuvo el favor general; no hubo separación radical con la tradición de Euclides. Los diversos autores difieren de Euclides: 1.º por una nueva disposición de los primeros teoremas, en el siguiente orden, ángulos en un punto, líneas paralelas, ángulos de los triángulos y polígonos, triángulos semejantes; 2.º por los teoremas relativos al área de los triángulos, paralelógramos y polígonos, presentados más bien bajo el aspecto de reglas de medida que de teoremas geométricos.

23. En cuanto al efecto de todos esos cambios sobre la educación, quizá sea demasiado pronto para sacar con-

clusiones. Estamos todavía en el período de transición. Sin duda los jóvenes encuentran la Geometría mucho más interesante que antes. Tienen más habilidad para resolver los ejercicios y ya no consideran la materia como una empresa sin objeto. Tienen mayor capacidad para *ver* un dibujo geométrico. Han adquirido seguridad y fácilmente pueden ser llevados a que emprendan por si mismos pequeñas investigaciones; hacen, por ejemplo, levantamientos de planos, etc., e inventan modelos mecánicos para ilustrar diversos puntos.

Por otra parte, se dispone de menos tiempo para escribir razonamientos formales y hay motivo para pensar que los jóvenes han perdido algo de su facilidad para expresar con palabras el razonamiento geométrico. Es este un déficit que se corregirá con el tiempo, y quizá convenga que el lenguaje euclídeo tipo sea sustituído por una expresión más individual, aun al precio de una disminución de la precisión de la expresión. En cierto momento pudo temerse que las verificaciones experimentales fueran tomadas como demostraciones, pero la distinción ha sido tan frecuentemente repetida que probablemente este reproche no puede hacerse a los nuevos métodos.

24. *Geometría de tres dimensiones.* — El sitio de esta rama en las escuelas no es todavía satisfactorio: ella no forma parte de la Geometría que se exige en los exámenes preliminares de Oxford y de Cambridge, lo que no quiere decir que no fuera ventajoso el que fuera comprendida en sus programas.

Cuando un joven ha recorrido el curso elemental de Geometría plana, es de suponer que haya recibido una suficiente educación en los métodos lógicos, en cuanto ésta puede ser dada por estudios de Geometría. Si aborda el estudio de la Geometría de tres dimensiones (geometría de los sólidos) su fin principal debe ser adquirir la facultad de realizar mentalmente las relaciones de las figuras en el espacio; debe aprender a *pensar en el espacio.* Entre los jóvenes que estudiaban el libro XI de Eucli-

des muy pocos llegaban a adquirir esta facultad; es por lo que no hay que lamentar que ese libro no sea, por así decirlo, leído en las escuelas.

Durante varios años, se hicieron tentativas por el Departamento de Ciencias y Artes (actualmente refundido en el *Board of Educatión)* para alentar el estudio de la Geometría de los sólidos. Fueron establecidos exámenes públicos para la llamada «Geometría descriptiva», por ejemplo: la representación de los sólidos por medio del plano y de la elevación y de las proyecciones perspectivas. Los mismos jurados examinaban el dibujo geométrico en el plano, y el sistema de examen desgraciadamente había terminado por reducir ambos estudios a una simple aglomeración de procedimientos especiales, con frecuencia enseñados por profesores que no habían recibido instrucción matemática.

Las tentativas fracasaron: los efectos sobre las escuelas públicas fueron malos, pues esas escuelas no utilizaban los exámenes del Departamento indicado.

25. Un curso que satisficiera la Geometría de tres dimensiones debería comprender:

(1) La determinación de las superficies y volúmenes de los sólidos elementales:

(2) La discusión de las relaciones de los puntos, de las líneas y de los planos en el espacio. Esto, sin apegarse a la forma, debiera ser comparativamente simple e ilustrado por toda clase de medios, tales como modelos de cartón o de hilos, vistas estereoscópicas, osaturas de de sólidos, etc., y ser intercalado incidentalmente en el curso de Geometría plana; por ejemplo cuando se expone las líneas paralelas y perpendiculares en el plano sería conveniente discutir las líneas y los planos paralelos y perpendiculares en el espacio. En realidad el primer estudio de la Geometría ¿no debería comenzar por ocuparse de los sólidos concretos, para pasar en seguida a abstracciones como el punto y la línea?

(3) Un curso de construcciones realmente fundamen-

tales de Geometría descriptiva. Si ese curso fuera dado inteligentemente probablemente contribuiría más que cualquier otro al desarrollo de la facultad de ver en el espacio.

No existe ningún curso aceptado o dado como ejemplo que responda a esas condiciones. Los profesores de matemáticas formados por la enseñanza universitaria ignoran generalmente en absoluto la Geometría descriptiva. Este reproche irá desapareciendo gradualmente, puesto que la Geometría descriptiva es exigida en los nuevos cursos para la obtención de los grados de Cambridge: entretanto es de esperar que esa materia haga poco a poco su camino en las escuelas públicas.

IV.—Álgebra

26. La reforma en la enseñanza de la Geometría fué acompañada de cierta actividad en lo que respecta al Álgebra. Muchos profesores y examinadores consideraban que la enseñanza había dado demasiada importancia a los ejercicios prácticos en detrimento del estudio inteligente del por qué y de las causas. Se empleaba ciertamente mucho tiempo en resolver largas series de ejercicios graduados sobre los factores, las ecuaciones, las fracciones, etc. Hubo una especie de rebelión contra esa costumbre, y los profesores ensayaron de facilitar el trabajo introduciendo relativamente al principio las gráficas, las tablas de logaritmos y otras cosas interesantes.

Todo esto tuvo un efecto estimulante. Es una revelación para un alumno aprender que una función de una variable puede ser asociada a una curva; que puede resolver ecuaciones, extraer raíces, etc. por métodos gráficos.

Como ocurre generalmente la reforma fué demasiado lejos. Algunos profesores y algunos textos no se contentaron con considerar como de paso las gráficas, tan sugestivas para un niño de 13 años, sino que desarrollaran el tema hasta invadir prematuramente la Geometría ana-

lítica. Hubo cierta tendencia a sustituir los métodos analíticos por los métodos geométricos y gráficos. La resolución laboriosa de los ejercicios de Álgebra fué acortándose cada vez más, de modo que llegó a temerse que los jóvenes llegaran a ser incapaces de emplear las expresiones algebraicas más simples.

El balancín se inclina ahora del lado opuesto. Si sus oscilaciones pueden ser moderadas a tiempo, se llegará a obtener un sistema que dará una habilidad suficiente en las aplicaciones directas y dará al mismo tiempo a la parte gráfica el sitio que debe ocupar en la enseñanza elemental.

27. Hablando francamente, no es fácil determinar el rol exacto de la enseñanza del Algebra en la educación secundaria. Puede admitirse que la concepción del Algebra como generalización de la Aritmética es de gran valor educativo. Cuando un joven es conducido a ver que una sola fórmula algebraica es una especie de percha en la cual vienen a reunirse un número infinito de datos aritméticos, habrá adquirido una de las ideas más fértiles que pueda darle la educación matemática. Esto sólo basta para justificar la enseñanza del Algebra, y este fin puede ser alcanzado sin dedicar demasiado tiempo a los ejercicios prácticos.

Lo que precede es un ejemplo de lo que puede llamarse las *ideas* unidas al mínimo de ejercicios necesarios para hacerlos inteligibles.

Por lo contrario, otra cosa ocurre para los que deben más tarde *servirse* de las matemáticas. Para ellos el Algebra es un instrumento indispensable. Si no tienen facilidad en el manejo de las expresiones algebraicas, su camino será espinoso. No pueden evitar el penoso trabajo de resolución de los ejercicios; y para el matemático, como para el músico, la habilidad es la recompensa de una larga y paciente práctica, que por sí misma puede ser de escaso valor, pero que es sólo deseable por el fin que se tiene en vista.

La distinción, indicada más arriba, entre el aficionado y el estudiante profesional de Algebra, es quizá sin importancia en Inglaterra, dado que el fin de la educación inglesa es en suma pasar los exámenes. Los exámenes ponen en juego la habilidad, pero no las ideas. Se sigue de aquí que todos los jóvenes ingleses reciben la enseñanza como si más tarde estuvieran destinados a servirse de las matemáticas.

V — Trigonometría

28. *Trigonometría plana* — Esta materia actualmente se introduce desde temprano en muchas escuelas, sea entre los 13 y los 15 años.

Se ha convenido en que todos los alumnos deben poder aprender la Trigonometría como desarrollo de la Geometría.

Esta introducción precoz ha llegado a ser posible gracias al hábito de insistir sobre la Trigonometría numérica. Un curso de introducción de Trigonometría numérica comprende: el seno, el coseno, la tangente de los ángulos agudos, la determinación gráfica de esas funciones, el uso de las tablas, la resolución de los triángulos rectángulos y problemas prácticos que de ellos dependen: estando todo ésto en estrecha relación con el dibujo a escala que actualmente forma parte de la enseñanza de la Geometría. Los demás triángulos son resueltos descomponiéndolos en triángulos rectángulos.

Tratados de esta manera los principios de la Trigonometría no ofrecen dificultad. Su posibilidad de ejecutar el trabajo en este período parece depender de:

1.º Una exposición muy graduada y la exposición de las dificultades unas después de otras, pues el uso, por ejemplo, de los senos logarítmicos en este período conduciría a confusiones.

2.º El aplazamiento de lo que puede llamarse la Trigonometría algebraica, sea, por ejemplo, las transforma-

ciones de expresiones que contengan las funciones trigonométricas.

La resolución de los problemas prácticos con frecuencia está basada sobre observaciones hechas por los alumnos con un teodolito simplificado.

Cuando los elementos han sido completamente asimilados, se encuentra que los progresos sobre los temas ordinarios son normales.

. . . .

VI

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS PÚBLICAS ELEMENTALES DE LONDRES

(Por el profesor P. B. Ballard, inspector de distrito de las Escuelas de Londres) (1)

Las matemáticas en las clases más adelantadas (Senior Departments)

Si se comparan las cuestiones de examen de hace algunos años con las que actualmente se proponen, se observarán las tendencias siguientes:

1. La aritmética es reemplazada poco a poco por las matemáticas. La geometría, las medidas y el álgebra se introducen gradualmente.

2. Los tipos convencionales fijos de operaciones se van abandonando cada vez más.

3. Los ejemplos elegidos se refieren a la vida diaria de los niños.

4. Las aplicaciones prácticas son cada vez más frecuentes.

Consideremos desde luego esta tendencia de ensanche del dominio de la aritmética y de la fusión de las diversas ramas de las matemáticas. Hace unos cinco o seis

---

(1) Este informe fué extractado en *L'enseignement mathematique*, 1912, y de él sólo extracto la parte refeiente a las clases más adelantadas, equiparables a las inferiores liceales francesas.

años, el álgebra fué introducida como materia distinta en los programas de gran número de escuelas, pero entonces sólo consistía en una manipulación mecánica de símbolos, sin ninguna relación con la aritmética. Actualmente el álgebra, como materia separada, va desapareciendo, salvo en las escuelas centrales (Central Schools), y se hacen tentativas para introducir algo de aritmetica. Esas tentativas son dignas de encomio, pero han tenido poco éxito. Es quizá discutible la cuestión de saber si el álgebra, debiera ser enseñada en las escuelas elementales. Personalmente estoy por la afirmativa, pues opino que debe utilizarse cuando su ventaja sobre la aritmética es manifiesta. El profesor debiera darse cuenta de que el alumno mismo siente la necesidad de su empleo.

La geometría, cuando figura en el programa como materia separada, consiste en problemas por resolver con auxilio de la regla y del compás. El profesor trata un problema en el pizarrón y los alumnos lo copian sobre su cuaderno de dibujo. Este método está casi universalmente difundido, y es ciertamente un mal método. Debiera ser sustituído por el método heurístico, pues si hay una materia para la cual se recomienda muy especialmente, es seguramente la geometría. La geometría teórica sólo es enseñada en las Escuelas centrales.

La transformación más considerable realizada en estos últimos años ha sido la introducción en las escuelas de lo que se llama la aritmética práctica, caracterizada por el empleo de objetos materiales, y la verificación de las conclusiones por experiencias concretas. Desgraciadamente se comete el error de relegar esta aritmética práctica al fin del año escolar, cuando debiera figurar al principio. En segundo lugar, el trabajo práctico es frecuentemente ejecutado por el profesor y no por los alumnos. En fin, esas operaciones ejecutadas, por decirlo así, sin un fin bien preciso tienen el riesgo de llegar a ser monótonas. Todo inconveniente desaparecería si fueran utilizadas para obtener algunos resultados interesantes para el alumno,

como la resolución de un problema o la construcción de un objeto. Un dominio especial de la aritmética que ganaría, si se desarrollara más del lado práctico, es la teoría de las fracciones, principalmente de las fracciones decimales.

En lo referente al lado teórico de la enseñanza de la aritmética, he comprobado que el estudio de las proporciones se hace de una manera insuficiente. Sería conveniente que se estableciera cierta relación entre las nociones de relación y de proporción y las figuras geométricas semejantes. Sería igualmente ventajoso que no se relegara el estudio de las cantidades medias al último año del programa escolar; su conocimiento, en efecto, permitiría a los alumnos que hicieran sus medidas con más exactitud, pues una media da geneneralmente un resultado más aproximado que una medida única.

La enseñanza de la aritmética se propone alcanzar dos resultados distintos. Uno consiste en la rapidez y exactitud de los cálculos, el otro en la inteligencia de la resolución de los problemas. Ambos fines no son ciertamente incompatibles, pero es difícil repartir bien el tiempo que se les consagra. Durante estos dos últimos años ha podido comprobarse una tendencia a desarrollar el trabajo inteligente a expensas, en caso necesario, de la exactitud mecánica.

Señalamos además, el lamentable hecho de que el último año de la enseñanza casi exclusivamente está dedicado a cuestiones de porcentaje, medias, descuentos, etc. Felizmente este estado de cosas tiende a desaparecer, y se trata cada vez más de reemplazar este defectuoso programa por una recapitulación general.

. . . .

Los planes de estudios matemáticos.—En las escuelas elementales ordinarias no se hace distinción de tendencias especiales, técnica, comercial, industrial, etc., en los programas. Todos los alumnos, cualquiera sea su futura vocación reciben la misma enseñanza. En las Escuelas Centra-

les, sin embargo, se distinguen dos clases de enseñanza, la una industrial, la otra comercial (sin hablar de la enseñanza doméstica, cuando se trata de una escuela de señoritas).

Esas Escuelas Elementales Centrales, una vez completas, serán 55: los alumnos ingresan en ellas a la edad de 11 años y permanecen 4 años.

Sobre esas 55 escuelas, 12 serán comerciales, 16 industriales y 27 comerciales e industriales. El programa de matemáticas, común para los dos géneros de escuelas, comprende la aritmética, el álgebra, el dibujo a escala, las medidas y la geometría experimental. Para las escuelas comerciales se incluye además las diversas operaciones de banca y transacciones comerciales; y para las escuelas industriales la trigonometría, el álgebra gráfica, la cinemática y el uso de instrumentos tales como la regla de cálculo, el nonius o vernier, el micrómetro y el teodolito. La especialización en las ramas domésticas para las Escuelas Centrales de señoritas se lleva algo más lejos que en las escuelas ordinarias. La enseñanza matemática de las clases industriales es más variada y más concreta que la de las clases comerciales.

En cuanto a los métodos de enseñanza ciertamente van mejorando. La reforma más carácteristica ha sido el desarrollo del lado práctico de la instrucción. En ciertas clases se permite a los alumnos que ellos mismos compongan los problemas; es un procedimiento ventajoso que debiera difundirse en todas las escuelas. Además, se han experimentado diferentes sistemas que podrán conducir a buenos resultados. En suma, se trata cada vez más de interesar al niño y de hacerle tomar una parte más activa en su propio desarrollo.

VII

LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PREPARATORIA

(Por E. Kitchener, profesor superior de la Escuela Goldon Parsonage de Heme Hemstead)

Hace unos 30 años una gran parte de los alumnos que se presentaban a las *Escuelas públicas* habían recibido en su casa la primera instrucción, y hace unos diez años sólo existía una decena de escuelas preparatorias reconocidas. Actualmente existen alrededor de 100 que preparan para más de 500 Escuelas públicas, de modo que la gran mayoría de los alumnos han seguido esas escuelas preparatorias antes de su ingreso en la *Escuela pública.* Este paso de una a otra escuela constituye para el alumno un cambio brusco, en lo que concierne a su educación, y el informe que resumimos aquí tiene por fin examinar los efectos de este cambio relativamente a la enseñanza matemática. Puede dividirse en tres partes: 1.º Influencia de los «Scholarships» ofrecidas a los alumnos de menos de 14 años; 2.º Efectos debidos a los cambios de escuelas; 3.º Recomendaciones.

Un interrogatorio fué enviado a las grandes «escuelas públicas» y otro a los directores de 40 o 50 de las más importantes escuelas preparatorias.

1.º El sistema de las becas de entrada (entrance scholarships) en las escuelas públicas es deplorable. Desde luego el trabajo de la escuela preparatoria puede sufrir a consecuencia de cierta especialización, en vista de la obtención de una beca para tal o cual dominio. Después, el joven alumno que se prepara para una beca de matemática (matematical scholarship) arriesga siempre hacer trabajar su memoria en detrimento de sus facultades iniciadoras. Debe decirse, sin embargo, que las condiciones de examen han sido considerablemente mejoradas estos últimos años y que mejor que antes permiten darse cuenta

de la capacidad del alumno. Para los alumnos de estudios clásicos de las escuelas secundarias los exámenes de promoción prácticamente no se consideran; son muy simples y son apreciados con gran indulgencia.

2.º Hace una decena de años la promoción de la escuela preparatoria a la escuela pública, constituía para las matemáticas una solución de continuidad; actualmente esta falta de continuidad es mucho menos sensible. Esto se debe, en gran parte, a la institución de la « *Common Entrance Examination* » para el ingreso en las escuelas públicas. Esta institución data de 1904, es dirigida por un comité de seis miembros, de los cuales tres son directores de las *Escuelas públicas* y tres de las *Escuelas preparatorias.* Las cuestiones de exámenes que ella prepara han sido adoptadas actualmente por 52 Escuelas públicas: de esto ha resultado naturalmente cierta unificación de los programas de las escuelas preparatorias. Además, ha sido publicado un plan de estudios de matemáticas para alumnos de 9 a 16 años, gracias a la cooperación de la « Head Master's Conference » y de la « Association of Preparatory Schools ». Este plan de estudios fué sometido a todas las Escuelas públicas y a todos los miembros de la *Asociación de Escuelas preparatorias.* Desgraciadamente muchos no se han tomado el trabajo de examinarlo; en cambio, los que lo estudiaron lo aprobaron generalmente, salvo alguna excepción, siendo adoptado por la mayoría.

La siguiente cuestión había sido planteada a las Escuelas públicas: «¿Encontráis que los alumnos salientes de las Escuelas preparatorias tienen cierta uniformidad en sus métodos?». Poco satisfactorias fueron las respuestas. Es interesante hacer constar que se encuentra más uniformidad en la geometría que en la aritmética y el álgebra, y ésto a pesar de las transformaciones que se han introducido en la enseñanza de la geometría durante los diez últimos años.

La falta de uniformidad en la enseñanza de la aritmética se debe a la gran variedad de los textos y al hecho

de que muchos directores no tienen en cuenta los informes que se les envía. En 1907 la «Mathematical Association» publicó un informe sobre la enseñanza de las matemáticas en las escuelas preparatorias, y en 1911 un segundo informe sobre la enseñanza del álgebra. Si esos directores se atuvieran un poco más a las proposiciones contenidas en esos informes, resultaría ciertamente más uniformidad en la enseñanza de la aritmética y del álgebra.

Las respuestas a la pregunta: «¿Encontráis que los alumnos salientes de las Escuelas preparatorias están mejor preparados en matemáticas que hace una decena de años?», fueron francamente afirmativas en casi todos los casos. Debe atribuirse este hecho a una mayor uniformidad en la enseñanza, gracias al examen común de ingreso. (Common Entrance Examination).

3.º Para luchar contra los inconvenientes antes citados, puede recomendarse:

a) la institución de mayor número de becas en todas las materias, a fin de evitar una especialización demasiado prematura;

b) un examen algo más severo sobre los conocimientos matemáticos de los futuros alumnos de estudios clásicos y lenguas modernas;

c) la adopción del plan de estudios publicado por el *Curriculum Committee of the Headmaster's Conference* para alumnos de 9 a 16 años.

VIII

LAS MATEMÁTICAS PRÁCTICAS EN LAS ESCUELAS PÚBLICAS

(Por H. Turner profesor de astronomía en la Universidad de Oxford, R. C. Fawdry profesor asistente del Colegio Clifton, A W. Siddons profesor asistente de la Escuela Harrow, F. W. Sanderson profesor principal de la Escuela Oundley y G. M. Bell profesor asistente del Colegio de Winchester).

En una introducción el profesor Turner nos da desde luego una idea general del asunto. Durante estos últimos

años la enseñanza de las matemáticas ha experimentado notables transformaciones. Se ha observado que los antiguos métodos, sin dejar de convenir a los *matemáticos natos*, no eran nada recomendables para los alumnos de mediana fuerza. Desde entonces se ha tratado de remediar este estado de cosas y hasta ahora los resultados han sido ciertamente alentadores. Además del beneficio que de esos cambios puede obtener el alumno mediano no está contrabalanceado por una pérdida correspondiente del « matemático nato ». En efecto, el alumno hábil puede ser descubierto por los nuevos métodos de enseñanza, tan bien, si no mejor, que por los antiguos; pueden entonces los profesores ocuparse de él de una manera especial.

La idea fundamental que sirve de base a esos nuevos métodos es la siguiente: Un alumno comprenderá mucho más fácilmente los procedimientos matemáticos si se le presentan en una forma práctica. Desgraciadamente este principio, excelènte en sí mismo, da lugar a ciertas objeciones cuando se tiene en cuenta otros principios importantes tales como los del orden lógico, por ejemplo. Así, el método de Euclides, conforme a ese último principio, deberá ser modificado si se desea introducir la geometría en una forma práctica.

¿Hasta qué punto debe ser impulsada esta modificación? Es esta una cuestión que no es fácil resolver, y sobre ella están muy divididas las opiniones. Algunos abandonan por completo el método, otros lo mantienen en parte, otros, en fin, se contentan con introducir en la clase algunos modelos y aparatos diversos. En todo caso, la introducción de los métodos prácticos ha contribuído a despertar el interés de los alumnos, a desarrollar su iniciativa y a estimular la enseñanza.

Lo que distingue además los nuevos procedimientos de enseñanza de los antiguos, es el principio de cooperación. Los alumnos trabajan en grupos de dos o tres, y si esta colaboración está bien comprendida, puede representar reales ventajas.

Existe, sin embargo, un punto relativamente al cual parece preferible el antiguo sistema, a primera vista por lo menos. Es que con los nuevos métodos prácticos los progresos son menos rápidos o en todo caso menos evidentes. Pero si ellos pierden en rapidez, nos harán notar los partidarios del nuevo sistema que son más seguros y más reales.

Es incontestable que los procedimientos prácticos toman más tiempo que los otros, pero sería fácil consagrarles un número de horas mayor, pues son menos fatigosos.

Del punto de vista de los exámenes, es preciso hacer constar que los nuevos métodos son más difíciles de juzgar y apreciar que los antiguos. Un alumno puede haber comprendido y ser sin embargo incapaz de mostrar que ha comprendido. El que se contenta con aprender de memoria cierto número de hechos puede aparecer en el examen bajo un aspecto más favorable que el que posee serios conocimientos prácticos. Por consiguiente, no debe atribuirse demasiada importancia a los resultados de los exámenes. Más bien debieran modificarse éstos de modo que en lo posible se adaptaran al nuevo estado de cosas. Esta modificación ofrecería sin duda grandes dificultades, quizá insuperables; pero, en todo caso, sería lamentable que se transformara un excelente sistema de enseñanza únicamente porque no se adapta al sistema de exámenes en vigor.

Los nuevos métodos prácticos presentan todavía una seria ventaja, pues permiten establecer una correlación más estrecha entre los profesores de matemáticas y los de ciencias (especialmente de física). En muchas escuelas, esta cooperación de los profesores ha sido organizada de una manera sistemática y otras seguirán sin duda sus huellas; además, las sesiones simultáneas de la *Mathematical Association* y de la *Association of Sciences Master's* activarán aún más el movimiento.

En suma, los procedimientos prácticos introducidos en la enseñanza de las matemáticas parecen haber hecho

sus pruebas, y se han mostrado hasta ahora bajo su aspecto favorable, y los profesores mismos sacan de ella cierto estímulo para realizarla.

IX

LAS RECTAS PARALELAS Y EL MÉTODO DE DIRECCIÓN

(Por T. James Garstand profesor de matemáticas en la Escuela Bedales, Pertersfield)

En Inglaterra, las reformas de la enseñanza de la geometría no han producido todo el mejoramiento deseable. Especialmente en la cuestión de las paralelas, las diversas tentativas que se hicieron para reemplazar el método de Euclides no son aceptables. Con el título de *Enseñanza de la geometría y del álgebra gráfica en las Escuelas secundarias,* el Consejo de Educación (Board of Education) publicó en 1909 una circular en la que proponía basar la teoría de las paralelas en la noción de dirección, alentando así a los profesores a que adoptaran un método falso y por lo tanto perjudicial para la enseñanza. En efecto, no es posible dar una idea clara de las paralelas considerándolas como líneas que tienen la misma dirección. En las lecciones de geometría se enseñará a los alumnos que las verticales tienen la misma dirección y que por lo tanto son paralelas, y en la lección de geografía se les dirá que ellas concurren en un mismo punto, que es el centro de la tierra. Otros inconvenientes resultan de la asimilación de la superficie de la tierra a una superficie plana. Los alumnos deben realizar que la existencia de las paralelas implica la admisión de un género de superficies diferentes de las superficies esféricas en las cuales las nociones de vertical y de horizontal no intervienen ya necesariamente. El autor expone un procedimiento geométrico que muestra la no evidencia del axioma de Euclides. Una concepción clara de las para-

lelas no puede obtenerse sin hacer un llamado a la noción del infinito, y nadie ha podido establecer un criterio sobre la igualdad de dos direcciones sin hacer intervenir, de un modo o de otro, alguna propiedad de las paralelas ya demostradas por Euclides.

Esta controversia sobre la cuestión de las paralelas es tan antigua como Aristóteles. Recientemente diversos autores se han ocupado de ella. Killing ha hecho investigaciones sobre la teoría de la dirección, remontándose hasta Leibnitz. Gauss se pronunció contra esa teoría, lo mismo que De Morgan, cuya opinión se encuentra expresada en una Revista de la Geometría de Wilson. Las críticas de De Morgan no fueron rebatidas, y en las ediciones siguientes de la Geometría de Wilson fué abandonado el método de dirección.

. . . .

Actualmente se acepta generalmente que los Elementos de Euclides no convienen para los principiantes de geometría, pero que esa no es razón para que una de las partes fundamentales de esta ciencia siga usando un método incorrecto. Muchos estiman que, en la enseñanza elemental de la geometría, debería admitirse explícitamente mayor número de hechos. A este respecto podemos recordar los métodos propuestos por Meray, Poincaré, Hadamard, Bourlet, Borel y otros autores franceses, cuyos procedimientos constituyen una primera introducción a la noción de grupo.

X

LAS MATEMÁTICAS Y MATERIAS TÉCNICAS EN LA ENSEÑANZA MEDIA

(Por T. S. Usherwood, profesor principal de la Escuela de Trabajo manual, West Horsham)

En la primera parte de su informe el autor resume el trabajo que actualmente se hace en una escuela secundaria

ordinaria, que posea un laboratorio de ingeniería; en la segunda parte propone su reorganización. La escuela de que se trata aquí es principalmente el College San Dunstan de Catford, que comprende una división superior, con secciones literaria, comercial y técnica, y una división inferior que incluye una sección latina y una sección no-latina. En su ingreso en la sección técnica (Technical IV) el alumno tiene alrededor de 13 años de edad. Se requiere conocer la aritmética, algo de álgebra y de geometría experimental. El hecho de estar en esta sección no constituye, propiamente hablando, una especialización, pues seis o siete lecciones por semana solamente se consagran a las materias esencialmente técnicas (Engineering), las demás lecciones se dan con los alumnos de las otras secciones.

Las materias técnicas, indicadas por el autor, comprenden el trabajo de los metales, la mecánica experimental y el dibujo mecánico. La principal dificultad se refería a la enseñanza de la mecánica experimental.

Fueron elegidos los temas siguientes: peso, movimiento, tensión de hilos, máquinas, frotamiento. El método de trabajo adoptado tenía principalmente por fin cultivar el espíritu científico del alumno, dando cada punto estudiado ocasión para investigaciones analíticas apropiadas. Para darnos una idea más precisa de los procedimientos empleados, el autor expone en detalle las lecciones sobre el «movimiento». Se comprenderá que en esta enseñanza el dibujo mecánico y la mecánica experimental, lo mismo que el trabajo manual, son ante todo considerados como una ocasión de realizar investigaciones matemáticas. El alumno comprenderá la importancia del empleo de las expresiones algebraicas, se familiarizará con la noción de función y las representaciones gráficas. El estudio de las fuerzas y de su equilibrio, así como el del movimiento conducirá al empleo de la rotación vectorial. Sin embargo, toda incursión en el dominio de las matemáticas puras se hace con un fin utilitario, planteando cada problema

de tal modo que el alumno comprenda su importancia práctica. Toda cuestión se aborda en su aspecto concreto, no aplicando el método deductivo sino cuando el desarrollo mental del alumno lo permita. La promoción a la clase *Technical VI* se hace a la edad de 16 años más o menos. En ese momento se ofrecen al alumno dos alternativas: prepararse para uno u otro de los colegios técnicos o entrar directamente en alguna manufactura industrial, química u otra cualquiera o proseguir sus estudios teóricos en los cursos nocturnos. La primera alternativa es preferible, siendo considerada la segunda como una sobrecarga de los estudios. El trabajo en la Técnica VI consistía, pues, en una preparación para el ingreso en un colegio de ingenieros. La repartición de las horas era la siguiente: materias de ingeniería 10, ciencias 8, física 4, química 4, matemáticas 7, materias literarias 7. Una de las diez horas consagradas a las materias de ingeniería, fué afectada a las matemáticas prácticas, 5 al dibujo geométrico y mecánico, 2 a la mecánica experimental, 2 al trabajo sobre metales. Durante las horas de dibujo, ciertos detalles de máquinas fueron abordados, necesitando un estudio más adelantado de geometría práctica plana y sólida. La geometría descriptiva fué desarrollada experimentalmente bajo forma de problemas de dibujo mecánico. La mecánica experimental fué encarada de un punto de vista más sistemático, combinando la faz experimental y la faz teórica. En fin, el tiempo reservado a las matemáticas, propiamente dichas, fué principalmente consagrado a la introducción natural del cálculo vectorial y del cálculo diferencial e integral. A este respecto el informe suministra una multitud de detalles que no podemos reproducir aquí. Diremos solamente que al cabo de dos años de trabajo, dedicándole término medio una hora semanal, los conocimientos adquiridos en las últimas materias fueron suficientes para permitir que los alumnos apreciaran su importancia y utilidad.

El autor presenta en seguida algunas observaciones con-

cernientes al sistema actual de enseñanza. Sucede con frecuencia, en las actuales condiciones, que el profesor de matemáticas se ve obligado a descuidar completamente ciertos aspectos de su materia o de introducirlos de un modo puramente mecánico sin que el alumno pueda darse cuenta de la utilidad de esa introducción. Ahora, del punto de vista educativo, importa, por lo contrario, que toda nueva cuestión se presente naturalmente al espíritu del alumno y sea motivada por su estudio anterior. Otro hecho que debía deplorarse es el empleo de textos en las clases inferiores. En la enseñanza superior los textos son indispensables, pero no ocurre lo mismo cuando se trata de alumnos menos adelantados; entonces es preferible que cada uno haga su propio texto. Este procedimiento ha sido adoptado para las materias científicas en estos últimos ocho o nueve años y de ello resultó un sensible mejoramiento. También debiera generalizarse este sistema en la enseñanza matemática de las clases inferiores. Sería también necesario que los profesores tuvieran mayor libertad en la elección de la materia de su enseñanza y en la manera de presentarla.

El autor propone una reorganización de los programas, en los que se reservará mayor espacio a los trabajos manuales, especialmente en la enseñanza inferior. Por trabajo manual no debe entenderse simples ejercicios en el manejo de herramientas, sino más bien un trabajo inteligente, en que el espíritu del alumno esté en actividad acordándole cierta libertad en la elección de sus métodos.

El programa de aritmética pura debiera ser simplificado y reducido prácticamente a la multiplicación, la división y proporciones. En álgebra sería necesario insistir sobre la noción de función y utilizar más inteligentemente las representaciones gráficas. En geometría, en fin, habría ventaja en reunir la estereometría y la planimetría. Sería entonces posible introducir en las clases adelantadas ciertos puntos descuidados hasta ahora, o tratados superficial-

mente por falta de tiempo (cálculo infinitesimal), cálculo vectorial, análisis armónico, teorema de Fourier, ecuaciones diferenciales, sencillas, etc.). Simplemente se trata de apartar las restricciones artificiales, alentar la individualidad y favorecer los métodos de investigación.

XI

LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA EN LAS ESCUELAS SECUNDARIAS

(Por G. W. Palmer, profesor de Matemáticas en Horsham)

Este informe se refiere más especialmente a las *Escuelas Públicas*, pero se aplica igualmente a los establecimientos secundarios. Al ingresar en la escuela, el alumno debe, por lo menos, conocer la numeración, las cuatro reglas, el uso de los números complejos y los elementos de las fracciones ordinarias. Desgraciadamente en muchas escuelas preparatorias esta enseñanza preliminar deja mucho que desear, lo que hace más difícil la tarea del profesor secundario. En las clases inferiores de las escuelas secundarias, la aritmética es generalmente enseñada por un no-especialista. Esta observación tiene importancia, pues un no-especialista, siendo quizá un excelente profesor, será naturalmente más conservador, menos entusiasta por las reformas que el matemático.

A fin de poder mejor juzgar las tendencias actuales de la enseñanza de la aritmética, el autor nos hace una descripción de esta enseñanza tal como se practicaba hace 25 años, después nos muestra lo que ha llegado a ser en la hora actual. Hace 25 años la aritmética estaba en vísperas de una importante transformación. Antes de esa época ella se desarrollaba de un punto de vista casi exclusivamente comercial. Su valor educativo no se reconocía y su enseñanza se hacía de una manera muy poco racional; generalmente bastaba haber aprendido las reglas

y saber aplicarlas. Mas tarde, cuando las matemáticas llegaron a ser una parte importante de la educación general, se dejó de considerar la aritmética como una materia puramente comercial y se empezó a tener en cuenta su utilidad como base de la enseñanza matemática futura y de los servicios que ella está llamada a prestar en otros dominios, particularmente la física.

En seguida pasa el autor a los detalles de esta enseñanza, en los últimos 25 años, y se ocupa sucesivamente de los diferentes capítulos de un modo más profundo (numeración, las cuatro reglas, números complejos, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, fracciones, fracciones decimales periódicas, práctica, áreas y volúmenes, método de reducción a la unidad, porcentajes, ganancias y pérdidas, interés, descuento, etc., raíces cuadrada y cúbica, medias, aligaciones, particiones proporcionales, etc.

Después de esto abordamos la aritmética moderna. Es la *Mathematical Association*, sociedad de profesores de matemáticas que, de hecho, ha tomado la dirección de las reformas recientes. En 1902 esta Asociación publicó un informe en el que se indicaban las reformas urgentes que debían hacerse en la enseñanza matemática. En la parte concerniente a la aritmética y al álgebra, se señalaba en particular el peligro que había de sacrificar la comprensión clara del asunto a la habilidad mecánica, tendencia muy perjudicial al verdadero valor educativo de esas materias. Para combatir este estado de cosas se hacían en ese informe las recomendaciones siguientes: practicar frecuentemente ejercicios de viva voz, insistir sobre la importancia de los principios fundamentales, generalizar las reglas, apoyándose en lo posible sobre la propia experiencia de los alunmos, aplicar la geometría, en particular las representaciones gráficas, a la aritmética y al álgebra, llevar más adelante las reglas muy difíciles y los ejercicios demasiado complicados.

Después de diversas observaciones concernientes a esas observaciones generales, el autor se ocupa más especial-

mente de los diferentes capítulos de la aritmética moderna (numeración, las cuatro reglas, números complejos, sistema métrico y fracciones decimales, factores y múltiplos, fracciones ordinarias, paréntesis, método de reducción a la unidad, proporciones, variaciones, porcentajes, raíz cuadrada, áreas y volúmenes de figuras rectangulares, medidas, aproximaciones, logaritmos, métodos de cálculo, intereses simples, intereses compuestos, descuento, etc., representaciones gráficas, problemas).

En resumen, las tendencias modernas referentes a la enseñanza de la aritmética son las siguientes: descartar del programa buen número de capítulos de los cuales puede muy bien prescindirse, eliminar igualmente todo desarrollo complicado y de carácter puramente artificial. Esta eliminación permitiría en cambio insistir sobre las partes más importantes e introducir más pronto otros dominios matemáticos, por ejemplo la Trigonometría. Hacer las nuevas nociones tan reales como sea posible por medio de aplicaciones concretas (punto de vista geométrico, diagramas, representaciones gráficas, trabajos de laboratorio).

Las comisiones de examen pueden contribuir en gran parte a la realización de esas reformas. Pero, actualmente, debe manifestarse, la mayoría de las cuestiones de exámenes constituyen un serio obstáculo para los cambios que debieran hacerse en la enseñanza matemática.

XII

LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

(Por C. Godfrey, profesor superior del Real Colegio Naval de Osborne)

I *Introducción.*—Los alumnos que estudian matemáticas en las Escuelas Secundarias, pueden dividirse en tres categorías:

1. Los que desean dedicarse a las matemáticas y estu-

diaran más adelante las matemáticas inferiores en la Universidad.

2. Los que se destinan a la carrera de ingeniero, o aquellos para los cuales las matemáticas constituyen una de las ramas importantes de su educación.

3. Los que estudian las matemáticas como una materia de su educación general.

Designaremos los alumnos que forman parte de las dos primeras categorías por el término de especialistas y los otros por el de no-especialistas.

Los especialistas forman una importante minoría entre los varones y un número insignificante entre las señoritas.

La enseñanza del álgebra, tal como actualmente se practica, sacrifica los intereses de los no-especialistas a los de los especialistas. Es éste uno de los puntos de los cuales se ocupa muy especialmente este informe, y para el cual habrá que encontrar un remedio, preocupándose de no caer en el extremo opuesto y de no sacrificar los intereses de los especialistas a favor de los no-especialistas.

Cuando los intereses de los dos grupos de estudiantes divergen, el primer remedio es, parece, separarlos en dos clases distintas. Pero es difícil distinguir desde el principio un especialista de un no-especialista, y la bifurcación no puede hacerse antes de los 16 años de edad. Después, eso complica la organización de la escuela y perjudica su solidaridad.

Mejor procedimiento sería elaborar un programa conveniente, que todos los estudiantes podrían seguir hasta cierto grado. Los no-especialistas no llevarían más adelante su educación matemática escolar, y quedarían todavía uno o dos años a los especialistas para completar la suya. Por lo demás, este procedimiento es el generalmente adoptado en las escuelas inglesas, pero la dificultad está en la elaboración de un programa común que sirva simultáneamente los intereses de ambas categorías de estudiantes.

Todos los alumnos, al abandonar la escuela, hacia la edad de 19 años, debieran tener un conocimiento suficiente de la trigonometría y una idea de los principios más simples de la mecánica, estudiados experimentalmente. Se debería también, según la opinión de algunos profesores, iniciarlos en las nociones fundamentales del cálculo infinitesimal. Pero, para introducir este nuevo dominio, es necesario hacerle sitio y desembarazarse de ciertas materias que incomodan. Este procedimiento de eliminación de materias inútiles, se ha practicado ya de una manera sensible en geometría; de ese punto de vista queda aún mucho que hacer en aritmética. Pero, en este informe debemos ocuparnos especialmente del álgebra- y de la selección que a su dominio corresponde. Se trata de distinguir entre lo esencial y lo superfluo.

II *El álgebra en el programa de la Escuela Secundaria*— Los primeros años del siglo XX constituyen una época de importantes transformaciones en materia educativa, especialmente en el dominio de las matemáticas. Antes, ese dominio era más o menos considerado como una materia aparte que tenía sus métodos propios y perseguía su propio ideal, ideal que podría designarse en términos generales por *disciplina del espíritu.* Actualmente, sucede cosa muy diferente: las aplicaciones de las matemáticas a los otros dominios son cada día más importantes: ingenieros, físicos, químicos, etc., utilizan cada vez más sus resultados. Esas transformaciones, en lo que concierne a los estudios elementales, fueran sobre todo sensibles en geometría y en aritmética. Se ha manifestado, además, un importante movimiento en favor de la fusión de las diversas ramas de las matemáticas.

En cuanto al álgebra, importa encararla de una manera diferente, según que se la considere como materia de estudio escolar o como medio de investigación del matemático. En la escuela, el álgebra debe ser utilitaria, en el más amplio sentido, y el alumno debe ser capaz de sentir la necesidad y comprender su utilidad. El empleo

de letras en vez de números es un procedimiento que se presenta naturalmente al espíritu humano. La experiencia enseña que el simbolismo introducido con discreción en el momento psicológico conveniente, parece natural a los alumnos y es aceptado sin ninguna resistencia. Todas las operaciones elementales del álgebra son ejemplos de geometría simbólica, y pueden muy bien servir como medio de introducción en ese dominio. El programa matemático puede ser considerado como un organismo que crece poco a poco, basándose cada nueva teoría sobre las precedentes. Poco a poco nuevas cuestiones se presentarán como dominio de investigación del álgebra, entre otras la geometría y la física, y en fin el cálculo infinitesimal. Para que la enseñanza sea un encaminamiento progresivo hacia el cálculo infinitesimal, es preciso desarrollar, por todos los medios, la idea de función. El mundo exterior ofrece una multitud de ejemplos propios para ilustrar esta noción. De hecho, vivimos en un ambiente de funcionalidad. La física, entre otras ciencias, es particularmente rica de ejemplos de esa naturaleza; la geometría (comprendiendo la trigonometría) igualmente. Por lo demás, está muy difundida la opinión de que la noción de función debe constituir la idea directriz de la enseñanza matemática.

III *Detalles concernientes al programa de no-especialistas* — Si en la enseñanza secundaria, se consagra al álgebra una parte excesiva del tiempo destinado a las matemáticas, se debe a que los profesores se preocupan ante todo de que sus alumnos adquieran una gran habilidad en la manipulación mecánica de las expresiones algebraicas. Lo que no significa que ejerciten a sus alumnos en esa manipulación mecánica sin hacerlos comprender lo que hacen, sinó que ellos desean que sus alumnos comprendan, a fin de que manipulen correctamente; pero es precisamente lo inverso lo que debe ocurrir. El fin que debe buscarse no es el de conseguir una hábil manipulación, sinó el conseguir la buena comprensión de la materia y su apropiada aplicación. Esto no quiere decir que todo

ejercicio mecánico deba desaparecer del programa, sinó que de preferencia se haga de una manera útil.

El autor pasa en seguida en revista, en una ajustada discusión, los diversos dominios del álgebra, tal como es enseñada en la Escuela Secundaria. Establece diversas proposiciones referentes a la supresión de numerosas teorías que no ofrecen utilidad para los no-especialistas. No es posible aquí entrar en los detalles de las razones que motivan esas supresiones. Nos limitaremos a citar las siguientes supresiones: Demostraciones formales de las leyes fundamentales; factores que exceden del segundo grado; fracciones (exceptuadas las que tengan por denominador un monomio o una expresión lineal); el máximo común divisor; multiplicaciones y divisiones largas; ecuaciones lineales simultáneas con tres incógnitas; ecuaciones literales (salvo las relativas a fórmulas); raíces cuadradas de los polinomios; progresiones; demostraciones formales de las leyes concernientes a las potencias; ejercicios complicados con potencias de exponentes negativos y fraccionarios y sobre las cantidades irracionales; ecuaciones simultáneas en las cuales las dos ecuaciones son de segundo grado o de grado superior; el teorema del resto, al dividir el polimonio $(f\ x)$ por $(x-a)$; números imaginarios y complejos; teoremas sobre las razones y proporciones; teoría del trinomio de segundo grado; permutaciones y combinaciones; escalas de rotación; binomio, serie exponencial y logarítmica; artificios de cálculo y manipulaciones «elegantes».

En cambio, se consagrará más tiempo al estudio de la variación de dos cantidades ligadas por una relación simple. Una sola variable independiente es muy suficiente para un primer estudio de la variación.

Gracias a las supresiones propuestas (y a otras que igualmente podrían hacerse en el programa de aritmética), se dispondrá del tiempo suficiente para introducir las tres materias siguientes: trigonometría numérica, mecánica, cálculo infinitesimal.

La trigonometría será estudiada en sus relaciones con la geometría, la agrimensura, la mecánica, etc. Comprenderá un estudio numérico y gráfico de la tangente, del seno y del coseno; la resolución de los triángulos rectángulos, al principio sin el empleo de los logaritmos; la resolución de los triángulos oblicuángulos, al principio por descomposición en triángulos rectángulos, después por medio de las dos fórmulas.

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C} \quad \text{y} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

haciéndose numerosas aplicaciones concretas; sólo debieran emplearse las dos fórmulas precedentes

$$\text{y} \qquad \text{tg.}A = \frac{\text{Sen } A}{\text{Cos } A} \qquad \text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

En mecánica, se tratarán los puntos siguientes: investigación experimental de las condiciones de equilibrio de tres fuerzas; composición y descomposición de fuerzas; momentos; centro de gravedad; frotamiento; medida del trabajo, de la velocidad y del rendimiento de las máquinas simples; la noción de la conservación de la energía.

Para el cálculo infinitesimal, puede recomendarse la obra de J. W. Mercer, del Real Colegio Naval de Dartmouth: «Cálculo para principiantes». Se determinará al principio el gradiente (la pendiente) en un punto de una curva, gráfica y analíticamente. Una vez en posesión de esta noción fundamental del cálculo infinitesimal, se tratarán sucesivamente los siguientes puntos: diagrama de los espacios y de las velocidades; diferenciaciones simples; máximos y mínimos en casos no complicados; integral definida e integral indefinida: relación entre ambas; numerosas aplicaciones, (áreas, volúmenes, centro de gravedad, trabajo, etc.).

Si se compara el programa que precede con el plan

de estudios de los liceos franceses, se observará que no hay nada de exagerado, tanto más que en Inglaterra el tiempo consagrado a las matemáticas es casi doble del que disponen los liceos.

XIII

LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA MEDIA

(Por C. V. Durell, profesor asistente del Colegio de Winchester)

Dado el rol importante que la geometría desempeña en los programas escolares, es de importancia asegurar una coordinación tan completa como sea posible entre las diversas formas que presenta esta materia. Hasta ahora no se ha tenido suficientemente en cuenta la unidad fundamental del sujeto. Esta falta de cohesión entre las diferentes ramas de la geometría ocasiona necesariamente numerosas repeticiones y por lo tanto una considerable pérdida de tiempo.

Si se examina el campo de geometría exigido para un candidato de matemáticas en su ingreso en la universidad, es el caso de preguntarse cómo un profesor puede llegar al término de su programa.

a) Euclides libros I a IV y VI.

b) Principios elementales de estereometría y nociones elementales de estereometría práctica.

c) Estudio más profundo de las propiedades del triángulo y del círculo, y teoría de las bases.

d) Geometría analítica, coordenadas cartesianas y polares y algunas nociones sobre las coordenadas homogéneas.

e) Las cónicas, del punto de vista geométrico, basándose sobre la definición relativa al foco y a la directriz.

f) Proyecciones ortogonales y cónicas.

g) Dualidad.

h) Homología e involución.

Si cada uno de estos temas debe ser tratado separa-

damente y de una manera suficientemente completa, es claro que el tiempo de que se dispone es en absoluto insuficiente. Resulta que algunos de ellos serán completamente dejados de lado o encarados muy superficialmente. Así, excluídos los especialistas, muy pocos son los alumnos que abordan los puntos *f*), *g*), *h*).

Se trata aquí de examinar si no sería posible modificar el orden generalmente adoptado en el estudio de la geometría, en forma de aprovechar mejor el tiempo de que se dispone.

Así, la cuestión de las proyecciones ofrece un interés completamente particular, pues abre al estudiante nuevos horizontes y constituye para él un precioso instrumento de investigación. Sería, pues, muy lamentable omitir este punto. Para empezar antes su estudio, dos cambios serían necesarios: el estudio analítico de las cónicas debería hacerse al mismo tiempo que la exposición de las propiedades geométricas simples; después el estudio profundo de las cónicas del punto de vista geométrico *e*) sólo debería hacerse más tarde, después que los resultados elementales de la geometría proyectiva hubieran sido establecidos.

Si se llevan paralelamente los procedimientos analíticos y geométricos, se tendrá la ventaja de poder escoger entre ambos métodos de que se dispone para resolver las diversas cuestiones que se presentaran. Lo mejor será munirse de los medios más simples, analíticos o geométricos, según los casos; el alumno se dará así cuenta de las ventajas que el uno presenta sobre el otro, según el género de cuestión; sin hablar de la economía que se realizaría. La introducción de los elementos al infinito puede hacerse de una manera interesante por el uno o por el otro procedimiento; dada la importancia del sujeto podrá ventajosamente presentarse los dos puntos de vista.

Otra cuestión se plantea: hasta qué punto debe recurrirse al análisis para establecer los principios fundamentales de las proyecciones. Del punto de vista de la

enseñanza, las demostraciones analíticas de los teoremas fundamentales serán más accesibles que otras al conjunto de los alumnos; pues, si se excluye el método analítico, se encontrará grandes dificultades cuando haya que identificar la definición de las cónicas obtenidas, partiendo de las proyecciones y la que se basa sobre las nociones de foco y directriz.

En seguida examina el autor de una manera más detallada esas diversas modificaciones referentes a la enseñanza de la geometría. El nuevo plan de estudios que propone ha sido concebido de acuerdo con las tres ideas directrices siguientes:

1. Economizar tiempo evitando inútiles repeticiones.

2. Poner al alcance del alumno mediano las importantes nociones de continuidad, proyectividad, transformación, tan apropiadas para estimular el interés, y que hacen de la geometría superior una materia de elevado valor educativo.

3. Elaborar un programa que, sin dejar de ser accesible al alumno que no tenga especiales disposiciones para las matemáticas, constituya sin embargo una preparación suficiente para el especialista.

Nos limitaremos a indicar las principales ventajas que ofrecería ese nuevo programa que, por lo demás, ya ha sido experimentado en estos últimos años:

1. Se economiza un tiempo considerable reuniendo en una sola materia las teorías analítica, geométrica y proyectiva de las cónicas; se alcanza mejor la unidad del sujeto y se tiene una idea más clara de sus principios fundamentales.

2. El cambio del punto de vista educativo estimula el interés del alumno, le da un sentimiento de maestría y lo induce a llevar más lejos sus investigaciones.

3. El estudio de la geometría proyectiva dejará de ser un dominio exclusivamente reservado a los especialistas.

XIV

EL VALOR EDUCATIVO DE LA GEOMETRÍA

(Por G. St. L. Carson, profesor principal de matemáticas en la Taubridge School)

Como lo indica el título, este informe no encara la geometría del punto de vista de sus aplicaciones a las otras ciencias o de su importancia práctica, ni con respecto al rango que ella ocupa en la educación matemática propiamente dicha. Unicamente se propone establecer las razones por las cuales esta materia es universalmente aceptada como un elemento necesario para la educación general. Para esto es necesario explicar de una manera algo detallada lo que realmente es la geometría. Esta materia está fundada sobre cierto número de hechos fundamentales que resultan de la experiencia. Importa insistir sobre esta naturaleza particular de los principios fundamentales. Para esto se tratará:

1.º De distinguir lo que es esencial de lo que es secundario en la apreciación de los puntos, líneas y planos y en sus mutuas relaciones.

2.º De basar sobre esta apreciación razonamientos lógicos, bajo forma de encadenamientos contínuos.

3.º Discutir la dependencia mutua de los principios y establecerlos de una manera precisa.

Esta manera de proceder es común a toda forma de construccción humana, y de ese punto de vista, el valor educativo de la geometría es indiscutible.

Otro factor que tiene su importancia y sobre el cual desgraciadamente no se insiste bastante, es el valor estético de la geometría. La contemplación de sistemas lógicos inatacables tales como se encuentran en las matemáticas evoca en nosotros una idea de perfección diferente de la que se encuentra en la literatura y en las artes.

Del punto de vista educativo, el estudio de la geome-

tría puede dividirse en tres períodos correspondientes a las tres divisiones citadas más arriba. En la primera se buscará sobre todo estimular y desarrollar la imaginación; en la segunda desempeña el rol principal el razonamiento, y en la tercera se discutirán los principios que sirven de base a los cuerpos geométricos y se investigarán sus relaciones mutuas. No se tratará en este informe de esta tercera división, pues ella no entra generalmente en el cuadro de los estudios escolares.

En la primera época de la educación geométrica, se tratará, pues, de estimular la imaginación del niño desarrollando las impresiones que es capaz de experimentar. Para ésto, habrá que acudir a nociones que le sean familiares (casas, caminos, montañas, islas, etc.). No es difícil concebir problemas que respondan a esta condición, estimulando la imaginación, desarrollando el espíritu de investigación y el razonamiento geométrico en sus formas más simples. Pueden dividirse esos problemas en cinco grupos:

1. Construcción de triángulos y de polígonos, siendo los datos solamente longitudes.

2. Simples construcciones para determinar la altura de edificios, el trayecto de buques, etc., dependiendo de las indicaciones de la brújula y de ángulos de elevación.

3. Construcción de triángulos y de polígonos, siendo los datos longitudes y ángulos.

4. Extensión de las cuestiones precedentes a problemas que comprenden más de un solo plano.

5. Determinación de un punto por la intersección de dos líneas geométricas o de sus límites cuando está sujeto a permanecer en el interior o en el exterior de varios lugares geométricos.

Las aplicaciones, al principio, deberán hacerse sobre objetos definidos, después sobre representaciones mentales de clases de objetos, en seguida sobre abstracciones (punto, línea, color, etc.) y para concluir se considerará el procedimiento mismo en toda su pureza. Esta manera de

operar puede ser considerada como una introducción a las ideas de grupos y de función.

La transición entre esta etapa preliminar y el primer curso de geometría formal se hará mediante la introducción progresiva del razonamiento deductivo abandonando gradualmente el empleo de objetos concretos que sirven para reforzar la imaginación. En un primer curso de geometría toda proposición que sea posible hacer aceptar al niño sin objeción alguna debiera adoptarse como postulado. Esta definición comprende: 1. La igualdad de los ángulos opuestos por el vértice. 2. Las propiedades de las paralelas relativas a los ángulos. 3. Las propiedades de las figuras que son evidentes por simetría. 4. Las propiedades de las figuras que pueden ser demostradas por superposición. Todo teorema propiamente dicho debería demostrar una propiedad nueva que no hubiera sido posible percibir por intuición directa, simetría o superposición. Si se preguntara dónde los métodos de la geometría se presentan con más unidad, simplicidad y belleza, debe responderse que es en la geometría de posición y en la geometría proyectiva. ¿Deben estas materias permanecer de propiedad exclusiva de los matemáticos de profesión y realmente están ellas fuera del alcance del adolescente? El autor opina que las nociones y métodos elementales de la geometría proyectiva pueden ser comprendidas por alumnos ordinarios, que ellas ofrecerán mayor interés qne cualquiera forma de la geometría euclídea, siendo su valor educativo muy superior. Experiencias concluyentes han sido hechas al respecto, sea con alumnos individuales, sea con clases reducidas.

En lo que respecta a la dependencia mutua de los postulados, una discusión detallada o sistemática estaría fuera de lugar en un programa escolar; sin embargo, algunos ejemplos de deducción de postulados podría hacerse; sería entonces posible hacer realizar al alumno el ideal de una geometría basada sobre el menor número de axiomas posibles. El autor está igualmente convencido

de que todo estudiante que tenga intención de continuar su educación en la universidad debería tener algunas nociones sobre la naturaleza de la geometría no euclídea.

Para darse bien cuenta de las tendencias actuales de la enseñanza de la geometría en Inglaterra, basta examinar las transformaciones que ha experimentado en los últimos tiempos. Pocos años hace Euclides era exclusivamente usado. Poco a poco las diversas escuelas fueron libertándose de esta estricta obligación, y en 1903 la Universidad de Cambridge publicó un programa en el que se especificaba que los examinadores aceptarían toda demostración sistemática de las cuestiones propuestas. Hay que notar también dos puntos importantes: la introducción de los cursos preliminares y la práctica de los ejemplos numéricos. El objeto de esos preliminares es el familiarizar al niño con las nociones elementales de la materia: consisten principalmente en ejercicios de medida y de construcción; solamente hay que lamentar que no se haya dado a la geometría del espacio un sitio de más importancia. Tales cursos deberían ser basados sobre la extensión gradual de la experiencia y de la imaginación del niño, lo que desgraciadamente no es el caso; es en fin de lamentarse al volver a encontrar la tendencia, a que antes nos hemos referido, de hacer intervenir procedimientos numéricos apropósito de los postulados.

Se encontrará en una circular publicada por el *Board of Education* interesantes informaciones sobre las transformaciones de estos últimos años y algunos consejos prácticos concernientes a la enseñanza. Es principalmente en las modernas escuelas secundarias que se comprueba una sensible mejora, mucho más que en los establecimientos del tipo antiguo que han quedado comparativamente estacionarios. Es que las escuelas modernas tienen a su disposición profesores que no solamente conocen bien su materia, sino que saben también cómo enseñarla. Es allí sobre todo que hay que buscar la razón de ese progreso, más bien que en los recientes cambios de los programas.

XV

LA CORRELACIÓN DE LA GEOMETRÍA PRÁCTICA ELEMENTAL Y DE LA GEOGRAFÍA

(Por la profesora Helena Bartham, maestra principal de la Escuela Secundaria de San Pancracio, Londres)

Habiendo llegado a ser la geometría práctica una parte importante de las matemáticas elementales en las escuelas elementales y medias, es de interés estudiar las relaciones con las demás materias del programa. En este informe, la autora estudia cómo la geometría elemental puede servir de base para la enseñanza de la geografía científica que puede enseñarse en la escuela para alumnos de 12 $^1/_2$ años, más o menos.

Medida de líneas — Desde que la noción de unidad de longitud es conocida, se la puede utilizar para la medida de la distancia entre dos ciudades sobre un mapa. Se llegará lo más rápidamente posible a la idea de escala y por consiguiente a la determinación de la distancia real. La utilización de los horarios de los ferrocarriles ofrece también cierto interés para la verificación aproximada de los resultados.

Es también el momento de enseñar a los alumnos a evaluar groseramente una longitud dada, por ejemplo, conociendo la longitud de su paso o utilizando otros medios de comparación. Se les hará medir la más corta distancia entre dos puntos de la esfera, por medio de un hilo tendido, y se les explicará porqué un buque no sigue siempre esa línea de menor distancia. Podrán en fin determinar la longitud de una línea curva e irregular cualquiera, por medio de una rueda que trace el contorno (tracing wheel), y así se darán cuenta de la longitud de frontera o de costa de un país.

Medida de los ángulos — Se estudiarán las divisiones de la brújula con el auxilio de un trasportador de cartón,

construido por los mismos alumnos. Podrá hacérseles construir una brújula de cartón, por medio de la cual tendrán como determinar las direcciones seguidas para ir de la casa a la escuela e inversamente.

Construcción de mapas — Una vez bien comprendida la evaluación de las longitudes y de los ángulos, pueden aplicarse a la construcción de mapas, muy simples al principio. El alumno aprenderá a determinar la dirección de la meridiana, sea encontrando la posición del sol a mediodía, sea por medio de la brújula marina. Colocándose en seguida en un sitio elevado y horizontal, podrá dibujar un mapa, o más bien un panorama de los objetos que le rodean, ocupándose únicamente de las direcciones.

Como ejemplo de combinación de medidas lineales y angulares, es muy indicado el dibujo a escala de la clase o sitio de recreo. Se insistirá sobre el hecho de que la reducción a escala no modifica los ángulos. Podrán igualmente introducirse otros métodos de construcción de mapas (triangulación, agrimensura) e imaginar variados problemas sobre este punto. La dirección del viento ofrece una nueva aplicación de las medidas angulares. En caso necesario los mismos alumnos podrán construir una veleta. Señalemos todavía la determinación de las alturas, con el auxilio de una base y de un ángulo de elevación.

Pendiente — Se explicará la noción de pendiente a los alumnos, los que, a simple vista, con un simple clinómetro de cartón, construído por ellos mismos, podrán determinar la pendiente de las calles vecinas.

Líneas de contorno — Sabiendo determinar las pendientes, estarán en condiciones de apreciar la significación de las líneas de contorno de un mapa. Podrán representar un corte del terreno utilizando, como se hace generalmente, escalas diferentes para las distancias verticales y horizontales; conviene también dibujar la pendiente real, para una parte del corte, a fin de tener de él una idea exacta.

Construcción de mapas con el auxilio de sombras — Puede

considerarse la posición de objetos sobre la tierra con relación al sol. Por ejemplo, la dirección según la cual un observador cambia de posición a mediodía puede determinarse por el ángulo que forma esta dirección con la de su sombra. Se podrá, pues, hacer un mapa del camino recorrido por el observador basándose sobre las modificaciones aparentes de la dirección de la sombra y tomando como unidad de distancia la longitud del paso. Hasta ahora sólo se ha tenido en cuenta únicamente la dirección de la sombra; la operación siguiente consistirá en mostrar cómo la longitud de la sombra varía con la longitud del objeto y también con respecto a la altura del sol sobre el horizonte. Los alumnos podrán entonces calcular la altura de objetos inaccesibles por la observación de la longitud de sus sombras. Se medirá la longitud de la sombra de un bastón de un metro todas las medias horas de un mismo día, la longitud de la sombra a mediodía durante un año; los gráficos correspondientes darán lugar a útiles observaciones sobre los días y las noches y sobre las estaciones.

Áreas — Un papel cuadriculado, representando cada cuadrado una unidad de superficie, podrá servir para estimar groseramente la superficie de un país, o mejor, para comparar la superficie de dos países representados a la misma escala. Se hará observar que cuando se reduce la unidad de longitud a su décima parte, por ejemplo, la unidad de superficie se reduce a una centésima parte.

Geometría esférica — Consideraciones sobre las propiedades de los círculos pueden ser deducidas de la observación de una esfera. Puede hacerse construir a los alumnos un modelo que comprenda el círculo del ecuador y cierto número de círculos meridianos, fijando el todo y dándole la apariencia de una esfera. Podrán agregarse los círculos de los trópicos y los círculos polares.

Latitud y longitud — El modelo en cuestión podrá servir ventajosamente para explicar los términos longitud y latitud. Se observará que la distancia a recorrer sobre la

tierra, paralelamente al ecuador, para que la longitud varíe de un grado, decrece a medida de su aproximación a los polos, mientras que la distancia que debe recorrerse a lo largo de un meridiano para que la latitud varíe de un grado es constante (si no se tiene en cuenta el aplastamiento de la tierra). Esas distancias pueden ser medidas aproximadamente utilizando el gran globo terrestre de la clase. En seguida se determinará la posición de un punto de la tierra por su latitud y su longitud. Por medio de una experiencia concreta se explicará más fácilmente la rotación de la tierra sobre sí misma y su revolución alrededor del sol, así como todas las consecuencias que de ella resultan, relativas a las estaciones, a los días y a las noches, a las horas de los diferentes puntos del globo, etc.

XVI

ESCUELAS SECUNDARIAS DE SEÑORITAS

(Por la profesora Luisa Stary, de la Escuela Real, Bath)

En 1867 apareció un informe de la School Inquire Commission, condenando la superficialidad y la insuficiencia de la educación en las escuelas de señoritas. Resultó cuatro años después, la fundación de la *National Union for improving the Education of Women of all Classes* que, en el año siguiente, organizó la *Girl's Public Day School Company*. Por primera vez fueron reconocidas las matemáticas como materia de estudio en el programa de las escuelas de señoritas, empezando por la *High Schools*, que se desarrollaron rápidamente en todo el reino, gracias a la actividad de esa sociedad.

Al principio se encontraron numerosas dificultades, a causa de la incapacidad de los profesores; por lo demás, el campo de estudio era poco extenso: una idea de la aritmética y del álgebra y algunos de los libros de la

geometría de Euclides, más o menos aprendidos de memoria.

Actualmente las matemáticas se enseñan de una manera notablemente uniforme, en lo que concierne a los programas y a los métodos, en todas las escuelas secundarias públicas de señoritas y en las mejores escuelas privadas.

Para obtener datos referentes al presente informe, fueron enviadas circulares a las directoras de 275 escuelas, habiéndose recibido 180 contestaciones con útiles informaciones.

Las escuelas secundarias de señoritas adoptan en general la siguiente clasificación:

Clases preparatorias (Kinder garten) para niñas de	5	a	7	años
Form. I para niñas de	8	»	10	»
» II » » »	10	»	12	»
» III para señoritas de	12	»	14	»
» IV » » »	14	»	15 1/2	»
» V » » »	15 1/2	»	17	»
» VI » » »	17	»	19	»

En la mayoría de las escuelas, cada clase está bajo la vigilancia especial de una profesora de clase (Formmistress) que enseña en su propia clase cierto número de materias y en otras clases lo que constituye su especialidad.

En las 180 escuelas que han contestado a las circulares, no hay menos de 681 profesoras que enseñan matemáticas. En cada escuela, la profesora principal de esta materia (Senior Mathematical Mistress) está encargada de la enseñanza de las clases superiores, y a veces también de los principiantes; debe vigilar igualmente la enseñanza matemática de toda la escuela y posee un certificado de estudios superiores.

En la gran mayoría de las escuelas (98 o/o) el campo de estudios corresponde al exigido para el ingreso en la universidad (Matriculation) y comprende: aritmética ge-

neral; el álgebra, incluyendo las ecuaciones de primero y segundo grado con una o dos incógnitas, las razones y proporciones, las reglas elementales relativas a las potencias, y las progresiones; los libros I a IV de Euclides según los métodos modernos. 84 % de las escuelas sobrepasan ese programa (logaritmos, binomio, Euclides VI y XI — 21, trigonometría elemental). Un pequeño número va todavía más lejos (matemáticas aplicadas, estática, dinámica, hidrostática) coordenadas geográficas, geometría plana moderna, secciones cónicas, y a veces los elementos del cálculo diferencial e integral, pero ésto es la excepción.

La época en que se empieza el estudio de las matemáticas propiamente dichas difiere según las escuelas. En la mayoría es en la *form.* III. A partir de esta época, la aritmética, el álgebra y la geometría se enseñan simultáneamente y no consecutivamente como en América, y recientemente se hicieron tentativas de fusión de las tres materias.

La aritmética se enseña desde las primeras clases hasta la *form.* V inferior en todos los casos. Algunas escuelas la abandonan en la *form.* V superior, pero la mayoría la mantienen hasta la *form.* VI. Para el ingreso en Cambridge y Oxford, uno de los exámenes se reserva especialmente a la aritmética, y ésto explica en parte el gran número de años que las escuelas inglesas dedican a la aritmética. Otra razón es la gran complicación del sistema de pesas y medidas. Podría economizarse dos años de estudio adoptando el sistema métrico que, actualmente, se enseña además del sistema inglés. Otra cuestión a la orden del día, es la de la aritmética comercial; muchos profesores estiman que varios capítulos, que ofrecen un carácter completamente comercial, deben eliminarse del programa. Grandes progresos se han realizado últimamente en los métodos de enseñanza de las fracciones decimales: señalemos también la introducción, desde las clases inferiores, de los métodos abreviados para la obten-

ción de resultados aproximados. Pudiera quizá preguntarse si no sería más sencillo, en las operaciones complicadas, introducir el uso de los logaritmos de 4 decimales.

En lo que concierne al álgebra, debe reconocerse que se consagra demasiado tiempo al estudio de puntos que sólo tienen interés para el futuro matemático, pero que habría que dejar de lado cuando se trata de cultura general [factores y fracciones de ciertos tipos inusitados], raíces (exceptuando la evaluación de las raíces aritméticas), imaginarias, trinomio de segundo grado. En cambio ciertos puntos que ofrecen mayor valor educativo podrían ser desarrollados (mecánica, medida, estereometría, cálculo infinitesimal, trigonometría numérica). Los métodos gráficos están actualmente en uso de un modo continuo en las escuelas de señoritas. Notemos, en fin, los progresos realizados por ciertos textos en la elección de sus ejercicios, que son menos artificiales y más prácticos.

En geometría, el movimiento en favor del abandono de los métodos puramente euclídeos sólo ha comenzado hace unos quince años. En gran número de escuelas, el primer año de geometría (generalmente la *form.* III) consiste en un trabajo práctico que conduce al descubrimiento de las principales verdades geométricas. De acuerdo con ciertas ideas emitidas por el *Board of Education*, en algunas escuelas se ha ensayado empezar la geometría teórica estableciendo las proposiciones fundamentales y aplicándolas a numerosos ejercicios. No se encaran las demostraciones rigurosas, que están fuera de lugar cuando se trata de principiantes. No es posible todavía juzgar de la eficacia de este método, que está en su período experimental.

En algunas escuelas, la trigonometría se empieza en la *form.* V superior, pero en la mayoría sólo aparece en la *form.* VI, o está completamente excluída del programa.

Algunas escuelas enseñan igualmente las matemáticas aplicadas, y aún las hay que tienen un laboratorio a su disposición.

Respecto de la correlación de las matemáticas con otras

materias se encontrarán interesantes proposiciones en un informe del *Joint Committee of the Mathematical Association and the Association of Public School Science Master*, titulado « The Correlation of Mathematical and Science Teaching ».

El sistema de los exámenes es bastante complicado. Aproximadamente pueden adoptarse las siguientes clasificaciones: 1. Exámenes escolares, que tienen lugar en ciertos intervalos durante el período escolar. 2. Exámenes de ingreso en las universidades. 3. Scholarships, y otros exámenes más adelantados.

No nos es posible en este breve resumen entrar en los detalles concernientes a esos diversos exámenes. Simplemente manifestamos que una simplificación del sistema completo se impone y que queda aún mucho que hacer para colocar la enseñanza matemática sobre una buena base pedagógica.

XVII

EXÁMENES PARA BECAS DE ESTUDIO

(Por el doctor F. S. Macaulay, profesor asistente de la Escuela de San Pablo. Londres y W. J. Greenstreed, editor de la «Mathematical Gazzette» y ex profesor de la Escuela de Marling Exadowed de Straud).

Actualmente las universidades, colegios y establecimientos públicos de las Islas Británicas tienen a su disposición becas que permiten a los jóvenes sin fortuna continuar sus estudios, si demuestran suficiente capacidad. Antes esas becas eran debidas a la generosidad de algunos donantes particulares, pero actualmente es el Estado mismo, quien cada vez más contribuye a ellas. Son naturalmente, los mejores candidatos que tienen derecho a esas facilidades que les permiten el ingreso en Cambridge, Oxford, etc. Resultó de esto que la obtención de esas becas fué constituyendo cada vez más un honor para la escuela de donde procedía el candidato. Poco a poco fue-

ron resintiéndose los propios estudios de las escuelas, que precisamente se regularon teniendo en vista esos exámenes de ingreso en las universidades, y puede decirse que la escuela secundaria no era más que el vestíbulo de la universidad. Esta manera de proceder ofrecía graves inconvenientes. No era justo sacrificar los intereses de la mayoría a los de unos pocos, que se proponían concluir sus estudios en la universidad. Actualmente, gracias al *Board of Education*, ha sido modificado este estado de cosas. Especialmente en el dominio de las matemáticas, se hace una distinción entre el matemático profesional y los alumnos que no tienen el propósito de continuar en la universidad: tampoco rigen los mismos programas para jóvenes que para señoritas.

Existen muchas clases de liceos: Fondation Scholarships, Scholarships, Major Scholarships, Minor Scholarships, Exhibitions, Sizarships, Bursaries, según la procedencia o su importe.

Este dinero es suministrado por las propias universidades, por las escuelas, por el Gobierno, por los Consejos de los Condados y otras corporaciones públicas. En Escocia, los «bursaries» son expedidos después de exámenes generales, que comprenden las matemáticas como materia obligatoria. El ingreso en la Universidad (Edimburgo, Glascow, Aberdeen, St. Andrews) se hace más pronto que en Inglaterra. En Irlanda, la «Queen's University of Belfast», y la «National University of Ireland» disponen de algunas becas; la Universidad de Dublin expide mayor número, pero el sistema que regula su distribución deja más bien que desear; así los conocimientos matemáticos que exige de los candidatos son insuficientes. En Inglaterra propiamente dicha, las pequeñas universidades y la Universidad de Wales sólo poseen un número restringido de «Scholarships»; la Universidad de Londres también dispone de pocas relativamente. En Junio, los candidatos de menos de 18 años de edad pueden presentarse a un examen para la obtención de 5 becas de 40 £ anuales,

válidas por dos años. Una de éstas es de matemáticas, combinadas con una materia accesoria. En Julio igualmente se ponen a concurso 19 « scholarships », de 50 £, válidas por un año, de las cuales tres son de matemáticas. En Oxford y Cambridge los exámenes que permiten obtener las « scholarships » son prácticamente iguales. En Cambridge cada año se expide unas cuarenta becas diversas para las matemáticas, cuyo importe varía de 30 a 80 £; en Oxford unas treinta. Las materias exigidas son: la geometría, el álgebra, la trigonometría, el cálculo diferencial e integral y la mecánica.

En Cambridge esos exámenes pueden dividirse en dos grupos: el « Trinity College group », que comprende cinco colegios y el « Pembroke and St-Jhon's group » que comprende siete. Para ambos grupos, los exámenes se dan al mismo tiempo, en el mes de Diciembre, de modo que no es posible al candidato volverse a presentar en el mismo año si no tuviera éxito la primera vez.

Hace veinte o treinta años, las cuestiones o temas de examen se repartían más o menos igualmente, en temas teóricos y temas prácticos. Más tarde fué suprimida la teoría, pues se creía que eso era cuestión de memoria y que solamente los problemas hacían posible la apreciación exacta del valor de un candidato. Actualmente se ha reaccionado, y se considera que algunas cuestiones teóricas pueden ser introducidas ventajosamente en los exámenes, pues ellas ofrecen interés por la manera original como pueden ser tratadas y porque permiten juzgar si el candidato es capaz de expresarse de un modo inteligible.

En el « Trinity group » los temas de examen ofrecen una gran variedad; en cambio los de « Pembroke group » son más uniformes. El autor formula algunas críticas personales sobre los temas de examen y sobre los puntos a que se refieren. Para el álgebra, los temas en número son insuficientes, dada la gran variedad con que se concretan (convergencia de series, fracciones continuas, de-

terminantes, probabilidades, teoría de los números, teoría de las ecuaciones). El examen de geometría no debiera versar exclusivamente sobre la geometría moderna, sino que además debiera comprender aplicaciones geométricas del cálculo diferencial e integral. Debe felicitarse a Cambridge y Oxford por haber rehusado acordar a los métodos gráficos más importancia de la que merecen, y esto a pesar de la insistencia con que algunos entusiastas cantan sus maravillas. Los métodos gráficos aplicados a la resolución de cuestiones de estática son útiles para el ingeniero, pero tienen poca importancia para el matemático. Los temas de los exámenes de estática y de dinámica presentan un real progreso sobre los del pasado, pues antes sólo eran un manantial de perplejidad para el estudiante.

Un punto sobre el cual el autor insiste más especialmente, es la importancia de la geometría para cuyos métodos no presentan la aridez del análisis elemental.

Uno de los inconvenientes inevitables de un sistema de exámenes es la publicación de textos especialmente escritos para ese efecto. Existen, sin embargo, excelentes textos que no tienen en vista ningún examen particular, pero hasta ahora no han obtenido el éxito que merecen.

El jurado encargado de la decisión de los temas de examen debiera ser compuesto de expertos suficientemente numerosos y verdaderamente capaces. Toda cuestión artificial, o cuya solución no depende de algún método o principio importante, debiera eliminarse sin escrúpulo.

XVIII

LA PREPARACIÓN DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

(Por el doctor T. P. Nunn, Viceprincipal de la Universidad de Londres, L. C. C.)

En este informe el autor examina la preparación de los profesores de matemáticas tal como ella se hace ac-

tualmente: después indica cuales son, de su punto de vista, los principios que deberían servir de base a esa preparación.

Actualmente se empieza a reconocer que un simple conocimiento de las matemáticas no basta para formar un buen profesor, sino que además se requiere que haya esestudiado los diversos métodos de enseñanza. La tarea del profesor de matemáticas no consiste solamente en la comunicación de ciertas verdades: debe buscar ante todo desarrollar de una manera normal la actividad intelectual de sus alumnos. Para esto es necesario que tenga suficiente conocimiento en psicología, lógica e historia de la ciencia y que muy especialmente se haya ocupado del desarrollo matemático del niño. El futuro profesor no debe limitarse a seguir cursos y ensanchar el círculo de sus conocimientos, sino que además debe entrar en la práctica de su vocación por un trabajo personal de observaciones y de experiencias hechas en la misma escuela. Ensayar la adquisición de la ciencia de la enseñanza fuera de la escuela, es como pretender aprender la química sin laboratorio.

En lo que concierne a la preparación matemática de los candidatos a la enseñanza, hay que distinguir entre la preparación científica o «académica», es decir, la adquisición de los conocimientos necesarios, y la preparación profesional, esto es: el estudio de los diversos métodos de enseñanza. Dos cuestiones se plantean: 1.o ¿Las preparaciones académica y profesional deben hacerse concurrentemente o sucesivamente? 2.o ¿Cuál es el mejor plan de estudios para el futuro profesor? La contestación a la primera de estas preguntas no es dudosa: la preparación profesional debe seguir a la preparación académica. Los colegios donde estudian los candidatos a la enseñanza sólo deberán ocuparse de la parte profesional de su preparación, o por lo menos la faz puramente científica deberá tener allí un rol mucho menos considerable. Es ésta una opinión que tiende cada vez más a difundirse.

Mayores dificultades ofrece la segunda cuestión, y una distinción debe hacerse entre los maestros de las escuelas infantiles (comprendidos los de las escuelas preparatorias no especialistas de las clases inferiores de las escuelas secundarias), los profesores de las escuelas técnicas y los profesores especialistas de las escuelas secundarias.

Respecto de la preparación de los maestros de las escuelas elementales, dos alternativas se ofrecen actualmente a los estudiantes: la una relativa a los que no prosiguen sus estudios en la universidad, y que conduce al examen de la « Board Education », y la otra para « indergraduates » que se proponen obtener un diploma en « Artes » o en « Ciencias ». En la primera alternativa las matemáticas son obligatorias, pero el campo es más vasto para los jóvenes que para las señoritas. En la segunda alternativa las matemáticas no forman una materia obligatoria del diploma. Actualmente se hace una revisión de las disposiciones del « Board of Education » y, a este respecto, el Training College Association ha presentado algunas recomendaciones que dan una idea de las tendencias actuales. Propone en particular: 1.º que ya no sean obligatorias las matemáticas; 2.º que los exámenes obligatorios y no obligatorios sean reemplazados por un examen de promoción y un examen adelantado; 3.º que no haya diferencia entre el programa de varones y el de señoritas; 4.º que los estudiantes que no se destinan a la enseñanza de las matemáticas no estén obligados a conocer los métodos de enseñanza concernientes a esa materia. Además la « Association » ha redactado algunos planes de estudio de acuerdo con ese nuevo orden de ideas.

En seguida formula el autor algunas críticas relativas a la parte matemática de los exámenes escolares, que permiten el ingreso en las universidades. Por lo demás, el fin y el carácter de esos exámenes se modificarán muy probablemente antes de mucho tiempo. Acabarán, sin duda, por comprender en su programa los métodos fun-

damentales del cálculo infinitesimal y tener en cuenta una preparación suficiente del profesor no especialista de las escuelas elementales o de las clases inferiores de las demás escuelas. Por el momento, sin embargo, este resultado no ha sido alcanzado: los métodos en la preparación del futuro profesor no favorecen su iniciativa y no contribuyen a eliminar y a enriquecer su trabajo. Estas mismas críticas conciernen igualmente a la preparación del profesor especialista de las escuelas elementales y del profesor no especialista de las escuelas secundarias: en efecto, esa preparación se hace de una manera demasiado estrecha y demasiado « disciplinaria ».

Los establecimientos donde se hace la preparación de los profesores pueden dividirse en dos categorías: los que están bajo la superintendencia del « Board of Education », que dependen del gobierno, y los que tienen una existencia independiente de todo apoyo oficial. Los primeros se ocupan de la preparación para la enseñanza de las escuelas elementales y secundarias. Para las escuelas elementales, la preparación puede hacerse, sea con dos años de estudios no universitarios (two years course), sea con tres o cuatro años de estudios universitarios. Los estudiantes que eligen « two year course » están obligados a enseñar por lo menos durante seis semanas en una escuela elemental pública y bajo la vigilancia de miembros del personal enseñante. En el caso de estudios universitarios el estudiante, una vez admitido en la universidad, no está obligado a continuar las matemáticas, es decir, que puede limitarse, en lo que concierne a esta materia, al campo representado por su examen de ingreso. El reglamento del «Board of Education» exige igualmente de los estudiantes una estada de práctica en una escuela elemental (ocho semanas como mínimo).

Si se trata de la preparación para la enseñanza en las escuelas secundarias debe ser graduado en la universidad, o tener estudios equivalentes, y su preparación propiamente dicha debe durar por lo menos un año. Debe

hacer por lo menos 60 días de práctica, los dos tercios de los cuales en una escuela secundaria: debe, en fin, estudiar de una manera especial una de las materias del programa de esas escuelas pudiendo, naturalmente, ser las matemáticas esa materia.

Además de los cursos ordinarios referentes a la preparación de los profesores, se han organizado con frecuencia conferencias especiales sobre la enseñanza de las matemáticas, sea por la universidad local, sea por el departamento de instrucción.

XIX

ESCUELA PEDAGÓGICA DE PERRY [1]

Origen de esta escuela en Inglaterra. El método de laboratorio en los Estados Unidos

En estos últimos años se ha observado en Inglaterra y en América del Norte, simultáneamente, un movimiento de opinión irresistible y avasallador en favor de la reforma de los procedimientos de enseñanza de las matemáticas, principalmente de la que tiene por objeto la preparación de los estudios técnicos.

Puede considerarse como jefe de esta escuela pedagógica, que así puede ya llamarse, al Profesor John Perry, que empezó a divulgar sus ideas de reforma hace ya cuarenta años, las implantó primero en el Colegio técnico de Finsbury, del que fué Director, más tarde en el Real Colegio Científico de Londres, en el cual es actualmente Profesor de matemáticas, y puede decirse que su sistema ha triunfado en toda la línea, pues hoy se halla en vigor en todas las principales escuelas técnicas de Inglaterra, como lo revelan sus programas y sus planes de estudio,

(1) Extracto de la memoria titulada *La enseñanza matemática en las escuelas técnicas de Inglaterra*, por don Luis Gaztelú, marqués de Echandía, Madrid 1913.

que hemos de examinar más adelante con la atención que merecen.

En los Estados Unidos se han generalizado también estas ideas, conocidas allí bajo la denominación de método de laboratorio, por la semejanza de sus procedimientos con el de los estudios mecánicos, físicos y químicos en los laboratorios. Uno de los más ardientes propagandistas de esta escuela en América ha sido el Profesor Moore, Presidente de la Sociedad Matemática Americana, La escuela de Perry y el método de laboratorio son, en realidad, una misma cosa, pues admiten los mismos principios y recomiendan los mismos procedimientos de enseñanza, diferenciándose sólo en detalles muy secundarios.

Para dar idea de lo que es la escuela pedagógica de Perry, convendrá dar a conocer primero sus principios y caracteres fundamentales; pero luego se completará este estudio examinando escritos del propio autor, y, entre ellos, muy especialmente dos: un discurso que pronunció en un Congreso sobre la enseñanza de las matemáticas, celebrado en Glasgow en 1901, donde presentó un programa de matemáticas elementales que caracteriza perfectamente su escuela; y, en segundo lugar, su obra intitulada *Calculus for Engineers*, Cálculo para los Ingenieros, que resume su enseñanza en el Colegio técnico de Finsbury, de Ingenieros mecánicos y electricistas. Esta obra contiene muchos comentarios del autor sobre la enseñanza. Los siguientes capítulos, que tratan de la enseñanza actual en las escuelas técnicas de Inglaterra, servirán también de complemento, pues en todas ellas se han organizado los estudios de acuerdo con estas ideas.

Principios y notas características de esta escuela

El principio fundamental de esta escuela, consiste en sacrificar el orden lógico en la exposición y la elección de materias a las condiciones psicológicas y a las facul-

tades mentales del alumno. Ningún método de instrucción es lógico, desde el punto de vista pedagógico, si no tiene muy en cuenta aquellas condiciones, dicen, con mucha razón, los adeptos a esta escuela.

Síguese de aquí que se deben elegir materias que despierten interés en el estudiante. Los partidarios de este sistema dicen, valiéndose de un símil, que los manjares matemáticos se deben servir bien aderezados para que sean apetitosos y puedan ser digeridos con facilidad. Se ha dicho que las matemáticas son la piedra de afilar la inteligencia, pero esto es cierto solamente cuando aquélla las recibe con verdadero interés. El estudio mecánico que se hace de ellas, a disgusto y en cumplimiento de un deber, no aguza el entendimiento, como no aprovecha para la nutrición al navegante que padece el mareo, el *beefsteak* que ingiere con repugnancia y con asco.

Otra de las condiciones que exigen en la elección de materias es la utilidad, pretendiendo enseñar desde el principio sólo cosas útiles, y haciendo ver al alumno, en cuanto es posible, la utilidad de lo que va aprendiendo, mediante aplicaciones oportunas, que contribuyen al mismo tiempo a despertar su interés.

El orden de exposición es uno de los caracteres más importantes de este método, y en este punto reforman radicalmente las costumbres clásicas de enseñar con absoluta independencia y en orden sucesivo la Aritmética, el Álgebra, la Geometría, etc. Recomiendan que se enseñen simultáneamente y por el mismo Profesor, que procurará fundirlas y hacer ver las íntimas conexiones que existen entre ellas, evitando así repeticiones inútiles, y elevando rápidamente a las nociones útiles, aún a las que pertenecen, según las ideas tradicionales, a ramas más altas de las matemáticas.

Es de advertir que con esto se hallan conformes muchos matemáticos y pedagogos eminentes, que no pueden ser considerados como verdaderos partidarios de la escuela de Perry, pero que coinciden con ella en este punto y en muchos otros muy importantes.

Es muy conocida la opinión de Tannery acerca de la necesidad de reformar la exposición de las lecturas de Geometría elemental sobre volúmenes y sobre áreas de la esfera, tomando como fundamento el Cálculo integral.

Refiriéndose a la demostración que se acostumbra a dar en la Geometría elemental (1) para probar la equivalencia de un prisma recto y otro oblícuo, cuando tienen igual altura y bases equivalentes, dice: «que debe conservarse en un Museo histórico como prueba de la inteligencia de nuestros antepasados».

Propone dos medios para reemplazar esta demostración. Uno poco riguroso (mediocre), que consiste en cortar los dos prismas en rodajas delgadas, de poca altura, o en construir los dos prismas con discos de cartulina. Con estos modelos, el teorema puede quedar *claro como la luz del día* en la mente del alumno.

«El segundo procedimiento es excelente, dice este autor, pero exige, sin duda, un esfuerzo importante; consiste en aprender algo de Cálculo integral antes de estudiar estos volúmenes. ¡Cálculo integral en el Instituto de segunda enseñanza! Sí, no hablo en broma. El esfuerzo necesario para aprender lo que son una derivada y una integral, y cómo se valúan las superficies y los volúmenes con el auxilio de estos maravillosos instrumentos, es ciertamente menor que el que se ha exigido hasta ahora a los niños para demostrar la equivalencia de los prismas, rectos y oblicuos y de dos pirámides (la figura de escalera que todos conocen, tan molesta de dibujar), y luego los insoportables volúmenes y áreas de revolución. Aún hoy día no sé la expresión del volumen engendrado por un segmento de círculo que gira alrededor de un diámetro.

«El enseñar lo necesario de Cálculo diferencial e integral y de Geometría analítica exigirá, quizás, yendo despacio, ocho o diez lecciones. ¡No se me diga que los

---

(1) *Revue pédagogique*, Julio de 1903.

alumnos no lo entenderán! ¿Por qué entienden entonces lo que ahora se les enseña acerca de estos volúmenes? Después de estas lecciones, bastará un cuarto de hora para establecer todos los volúmenes y áreas de la Geometría elemental. Y reflexionad, además, en el mundo de ideas que se abre al alumno, en la multitud de aplicaciones que podrá hacer ».

En la obra ya citada de Laisant, *La Mathématique*, se encuentra a cada paso ideas análogas. He aquí un párrafo muy expresivo [1]:

« Cuando los elementos de aritmetica, de álgebra y de geometría queden libres de la multitud de proposiciones parásitas y reducidas a la exposición de las ideas directivas y de los métodos esenciales, no solo se habrá conseguido ganar un tiempo precioso, sino también mayor claridad en las ideas. Esto permitirá la introducción de los elementos de la Geometría analítica y del Cálculo.

« Este conjunto de conocimientos representa lo que toda persona bien educada debe saber de matemáticas. »

Es sabido que las primeras nociones de representación de curvas figuran hace mucho tiempo en el bachillerato en ciencias de Francia. Lo mismo sucede en Alemania; y en Inglaterra, donde se ha introducido esta enseñanza en la forma de « Usos del papel cuadriculado », se ejercita a los niños de la escuela de primeras letras, en cuanto conocen las cuatro primeras reglas de la aritmética en la representación de funciones y en problemas sencillos y muy útiles, que sugiere el estudio de las curvas.

En Francia se ha ido más lejos; los programas del bachillerato en ciencias de 1902, comprenden los elementos de la Geometría analítica y del Cálculo infinitesimal, llegando a la definición y aplicaciones fáciles del Cálculo integral, y la misma tendencia se observa en Alemania.

A su vez, el Profesor americano Mr. Moore, en su discurso presidencial de la asamblea anual de la Sociedad

(1) Edición de 1898, pág. 270.

matemática americana, celebrada en Nueva York en 1902, pronunció estas significativas palabras:

« Como matemático puro, considero de la mayor importancia en el actual movimiento de la opinión inglesa, la sugestión de Perry, a saber: que enseñando con solidez la parte práctica de las matemáticas, el cálculo aritmético, el dibujo industrial de máquinas y los métodos gráficos en general, en relación contínua con problemas de física, química e ingeniería, es posible proporcionar a alumnos muy jóvenes un amplio cuerpo de doctrina con las nociones esenciales de Trigonometría, Geometría analítica y Cálculo infinitesimal. Esto se consigue, en primer lugar, por el aumento de atención y de comprensión que se obtiene al combinar las matemáticas abstractas con otras materias que naturalmente interesan al joven estudiante, de modo que todos los resultados obtenidos por procedimientos teóricos se puedan comprobar experimentalmente en el laboratorio, y por otra parte, disminuyendo el aparato de exposición en la parte sistemática y formal de la instrucción matemática.»

Aquí se indica ya un nuevo paso en las reformas preconizadas por la moderna pedagogía. Ya no basta simultanear el estudio de las diversas ramas de las Matemáticas. Es preciso que, al mismo tiempo que esta ciencia se va desenvolviendo gradualmente, en una sola clase y con un solo Profesor, se estudien en otras clases, la Física, la Química y las aplicaciones a las diversas especialidades del Ingeniero, relacionando íntimamente las diversas clases.

Más de un lector considerará, tal vez, como irrealizable alguna de estas aspiraciones. Para convencerse de lo contrario, basta que consulte los planes y programas de las principales escuelas del Reino Unido, que figuran en los capítulos IV y V y han sido traducidos literalmente de documentos oficiales.

Todo ello se ha llevado ya a la práctica y se halla en vigor en todas las escuelas técnicas de Inglaterra, pues

las que he estudiado especialmente son las principales y las que sirven de norma a todas las demás.

Asamblea de Glasgow. Discurso de Perry

En la asamblea celebrada en Glasgow en 1901 para discutir sobre la enseñanza de las matemáticas, presentó el Profesor Perry un programa de matemáticas elementales con destino a los colegios de niños, y aún de señoritas, que está inspirado en las ideas del autor, tomadas en toda su amplitud y llevadas a sus últimas consecuencias. El discurso que pronunció en defensa de dicho programa contiene, en principio, todo lo esencial de su método, y antes de dar a conocer íntegro el programa que propuso, extractaré algunos párrafos del discurso no sin recomendar al lector a quien interesen estos estudios, que lea el original (1). Su autor desarrolló este programa en seis conferencias para obreros, que pronunció en el Museo de Geología práctica, proponiendo un gran número de ejercicios que debían ser resueltos por los oyentes en el intervalo de tiempo entre dos conferencias, y han sido publicadas o reeditadas recientemente (2). El examen del programa y del follecto mencionado, que no pasa de 172 páginas, hacen ver, con sorpresa inevitable, el camino que se puede recorrer en poco tiempo en el estudio de las matemáticas, cuando este estudio se limita a las nociones de aplicación inmediata, prescindiendo de todos los desarrollos teóricos que no tienen este carácter.

Cuando Perry pronunció el discurso a que me refiero, ya estaba muy adelantada la labor de transformación de la enseñanza en las escuelas técnicas, y en muchas de las más importantes se habían organizado los estudios con arreglo a los nuevos principios. Ante la grave responsabi-

(1) *British Association Meeting at Glasgow, 1901.—Discussion on the Teaching of Mathematics.* London, 1902.

(2) *Practical Mathematics.* Summary of six lectures delivered to working men by Prof. John Perry. Board of education, 1910.

lidad que le correspondía en esta obra, empezó su discurso invitando a sus contradictores a que manifestaran claramente su pensamiento, para que la Asamblea decidiera si era procedente continuarla o debía ser suspendida, antes de que los daños, caso de haberlos, llegaran a ser irremediables.

«No es ésta, dijo, una discusión académica. Quien quiera que piense que estoy cometiendo un error, o vea cómo se puede mejorar mi método y se calle, está haciendo un daño real y positivo al país. Dentro de pocos años este nuevo sistema se habrá generalizado y no será tan fácil como ahora, sino muy difícil, por el contrario, deshacer esta obra. He dicho que reconozco mi enorme responsabilidad, y espero que os convenceréis de que tenéis que cumplir un deber manifestando vuestra opinión.

«Al presentar este programa, quiero que se entienda claramente que recomiendo este método para toda clase de alumnos; no sólo para los alumnos ingenieros, no sólo para la juventud de los colegios, no sólo para el niño inglés de inteligencia media, sino también para los niños de inteligencia privilegiada, que son menos del uno por ciento de la clase más elevada, como también para los jóvenes — uno por cada diez millones — capaces de llegar a ser grandes matemáticos.»

Se extiende luego en consideraciones para probar que la utilidad inmediata debe determinar la elección de las materias que se deben enseñar al principiante, contestando a muchos contradictores que le han censurado por esta afirmación, y hace la siguiente enumeración de los resultados útiles del estudio de las matemáticas, llamando la atención sobre el abandono de la enseñanza clásica en todo lo tocante a este punto de vista:

«1) *Producir* las más elevadas emociones y proporcionar placer mental, descuidado hasta ahora la enseñanza de casi todos los jóvenes.

2) *a.* Desarrollo intelectual. *b.* Enseñar caminos lógicos para discurrir, descuidado hasta ahora en la enseñanza de la mayor parte de los jóvenes.

3) Proporcionar instrumentos matemáticos para el estudio de la ciencia física, descuidado hasta ahora en la enseñanza de casi todos los jóvenes.

4) Conseguir la aprobación en los exámenes. Este es el único punto de vista en que no ha habido descuido. el único reconocido, en realidad, por los Profesores.

5) Proporcionar al hombre instrumentos mentales que pueda usar con la misma facilidad que sus piernas y sus brazos, habilitándolo para continuar su obra de educación durante toda su vida (mediante el desarrollo de sus facultades mentales), y utilizando, a este fin, toda la propia experiencia. Esto es enteramente análogo a la aptitud para la propia educación mediante la afición a la lectura.

6) Quizás incluído en el precedente: enseñar al hombre la importancia de pensar las cosas por si mismo, librándolo del espantoso yugo de autoridad que hoy padece, y convenciéndole de que, ya mande a otros, ya obedezca, es uno de los seres más elevados. Esto, generalmente, se deja a otros estudios, que no son los matemáticos.

7) Hacer sentir a los hombres que se dedican a cualquier profesión que exija la aplicación de las ciencias, que conocen los principios en que aquélla se funda, y con arreglo a los cuales se debe obrar.

8) Dar a las inteligencias agudas y filosóficas un consejo lógico de perfección, que a la vez encanta y satisface, evitándoles así que traten ningún asunto filosófico desde un punto de vista exclusivamente abstracto, porque lo absurdo de tal empeño ha sido claramente demostrado.»

A todas estas altas aspiraciones pretende satisfacer el Profesor Perry con su nuevo sistema.

No le seguiré en esas lucubraciones filosóficas. Creo que más que estas sutilezas dicen, en favor de su sistema, el examen de sus procedimientos y programas, y, sobre todo, los resultados de la experiencia, que han sido ya juzgados suficientes para que se haya adoptado en todas las escuelas inglesas y en muchas norteamericanas, y en

algunos de sus puntos más importantes, en Francia, Alemania y otras naciones europeas.

« Hace cincuenta años, dice en otra parte de su discurso, se creía acertado enseñar del mismo modo la física y la química a todos los hombres; como si todos se propusiesen ser físicos o químicos. El enorme desarrollo de estas ciencias hizo necesaria una reforma, y la novedad de estos estudios facilitó el cambio de sistema. Por la misma razón creo que se deben enseñar las matemáticas, incluso las altas matemáticas, de muy diferente modo a los distintos estudiantes. En todo caso, estoy cierto de que nuestro sistema de enseñar a los niños las matemáticas elementales, como si todos hubiesen de cultivar las matemáticas puras, debe reformarse. Quizás me perdonen los matemáticos mi impertinencia al decir que, aún para el joven que reune condiciones para llegar a ser un gran matemático, se deben recomendar los nuevos métodos de enseñanza ».

«Ahora enseñamos a todos los niños lo que se llama filosofía matemática, y por respeto a algún futuro matemático que pueda haber entre ellos, arruinamos a todos los demás. Es lo que sucede en la naturaleza con los peces: de cada 10.000 arenques que se procrean sobrevive uno; de 10.000 huevos de salmón resulta que sólo un ejemplar llega al mercado; 10.000 Toms, Dicks o Harrys destruídos para producir un hombre capaz de enseñar las matemáticas en una escuela de segunda enseñanza; 10 millones sacrificados a la producción de un gran matemático. »

Aquí aboga por la vulgarización de las matemáticas; que es otra de las grandes aspiraciones de este Profesor, no solo quiere hacerlas asequibles, en su parte elemental (ya sabemos cómo entiende él esta palabra), y de inmediata utilidad a todas las clases sociales, sino *a todos los ingleses*, como dice en otra parte.

No quiero pasar a exponer el programa anunciado, sin transcribir el siguiente párrafo substancioso y muy característico de este original autor:

« El carácter nada práctico de la enseñanza matemática es causa de que los matemáticos prescindan del sentido común en toda la enseñanza. Buenos ejemplos de ello vienen de Alemania, Francia y Suiza. El ingeniero necesita conocer la estática gráfica. Un curso de pocas semanas, bien combinado, le puede proporcionar un conocimiento tan completo de los principios generales, que es suficiente para que (contando con su sentido común) pueda resolver casi todos los problemas que necesite. Pues es muy frecuente, en algunas escuelas politécnicas, dar un curso muy científico de varios meses, a veces de un año; todo problema que haya sido estudiado alguna vez por alguien, debe ser resuelto por cada uno de los alumnos. Cada una de las soluciones de casi todos los problemas va unida al nombre del Profesor que la propuso. Lo mismo sucede con la Geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas gráficas. El alumno de disposición común, bien dirigido, con un estudio de pocas semanas es realmente un maestro en cualquiera de esas materias, mientras que el que ha estudiado un curso largo y muy científico carece de iniciativa y no es capaz de resolver un problema nuevo. Si dispusiera de tiempo, podría citar algún ejemplo divertido. »

He aquí el programa de matemáticas elementales propuesto por Perry a la aprobación de la Asamblea de Glasgow. Lo traducimos lo más literalmente posible:

Programa de matemáticas elementales

PRIMERA PARTE

CURSO ELEMENTAL

Aritmética — Los números decimales, que deben ser usados desde el principio; el engaño de conservar más cifras que las que se pueden justificar, en los cálculos

que contienen números observados o procedentes de medidas. Métodos aproximados para multiplicar y dividir números, omitiendo todas las cifras innecesarias. Uso de aproximaciones groseras en el cálculo aritmetico, especialmente para fijar la posición de la coma.

Equivalencia de las expresiones tales como $5{,}204 \times 10^5$ y 520.400 y de $5{,}204 \times 10^{-3}$ y 0,005.204. La significación de un logaritmo vulgar: empleo de los logaritmos en la multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces. Cálculo de los valores numéricos con fórmulas de todas clases, incluso complicadas.

Principio de la construcción y método de empleo de la regla logarítmica; su aplicación al cálculo numérico. Conversión de los logaritmos vulgares en neperianos. Cálculo de las raíces cuadradas por la regla ordinaria de la Aritmética. Uso de fórmulas algebraicas en cuestiones prácticas sobre la razón y la proporción. Simplificación de quebrados. Cálculo de los tantos por ciento. Expresar los chelines y peniques en decimales de la libra esterlina; los cuarterones y libras como decimales del quintal o de la tonelada, etc.; de este modo todos los problemas de interés, descuentos y otros análogos se convierten en meras aplicaciones de sentido común de reglas muy sencillas.

Álgebra — Entender cualquier fórmula de modo que se pueda aplicar cuando se den los valores numéricos de las diversas cantidades. Reglas de los exponentes.

Traducción en fórmula algebraica de una regla expresada aritméticamente. Todo esto ha sido ya incluído bajo el epígrafe *Aritmética*. Problemas que conducen a ecuaciones fáciles de una o dos incógnitas. Transformaciones fáciles y simplificaciones de fórmulas en casos sencillos, despejando cada una de las cantidades, cuando las demás sean dadas. Práctica de la manipulación algebraica en general.

La determinación de los valores numéricos de las constantes en ecuaciones de forma conocida, cuando se dan

valores particulares a las variables. La significación de la expresión «A varía como B».

Factores de expresiones tales como $x^2 - a^2$, $x^2 + 11 x + 30$, $x^2 - 5 x - 66$.

Mensuración — Comprobación experimental de la regla relativa a la longitud de la circunferencia, empleando hilos arrollados a cilindros, o haciendo rodar un disco o una esfera. Invención de métodos para medir longitudes de curvas. Comprobación de las reglas de las áreas del triángulo, rectángulo, paralelógramo, círculo, elipse, cilindro, cono, etc., empleando escalas y papel cuadriculado. Proposiciones de Euclides relativas a las áreas, comprobadas por medio del papel cuadriculado y también por cálculo aritmético, midiendo las líneas y ángulos. La determinación de áreas de figuras planas irregulares (1) por medio del planímetro; (2) por medio de la fórmula de Simpson u otras reglas conocidas para el caso en que se da un cierto número de ordenadas equidistantes; (3) por medio del papel cuadriculado, cuando se dan ordenadas cualesquiera, no equidistantes; hallar las equidistantes; (4) pesando una figura recortada en cartulina y comparando su peso con el de un cuadrado; (5) contando los cuadrados en el papel cuadriculado para comprobar las reglas. Reglas relativas a las áreas de esferas y anillos. Reglas de los volúmenes de los prismas, cilindros, conos, esferas y anillos comprobadas experimentalmente; por ejemplo, por el agua que rebosa de vasos llenos, o pesando objetos de esas formas hechas con un material de peso específico conocido, o llenando de agua vasijas de capacidad conocida.

La determinación del volúmen de un sólido irregular por cada uno de los tres métodos indicados para las áreas irregulares, debiendo consistir el primer procedimiento en obtener una figura plana irregular, en la cual, haciendo variar las coordenadas, se obtengan las secciones transversales variables del sólido. Determinación de pesos por medio de los volúmenes, cuando se dan las densidades.

Traducción de las reglas de mensuración en fórmulas algebraicas. En tales fórmulas, cada una de las cantidades se puede considerar como incógnita, siendo dadas las demás. Ejercicios numéricos de mensuración.

El trabajo experimental en esta materia debe llevarse simultáneamente con la práctica de pesar y de medir en general; hallando pesos específicos, haciendo aplicaciones del principio de Arquímedes, determinando los volúmenes desalojados por los cuerpos flotantes y otros trabajos científicos elementales análogos. Un buen Profesor no omitirá esta labor experimental; guardará el equilibrio oportuno entre el trabajo experimental, la enseñanza didáctica y los ejercicios numéricos.

Uso del papel cuadriculado.—Uso del papel cuadriculado por los comerciantes, físicos, etc., para conocer de una ojeada la elevación y baja de los precios, de la temperatura, de la marea, etc. El uso de papel cuadriculado debe comprender ejercicios de géneros muy variados, pero haciendo notar que todos obedecen a una idea común. Se pueden mencionar los siguientes ejercicios:

Gráficos de estadísticas de cualquier clase, de interés general o especial. Lo que enseñan esas curvas. Noción de la derivada.

Interpolación o investigación de los valores intermedios probables. Errores probables de observación. Formación de listas completas de precios por los fabricantes. Cálculo de una tabla de logaritmos. Hallar el valor medio. Areas y volúmenes, como se ha explicado más arriba. El medio de explicar la posición de un punto de un plano; la x y la y, y también la r y la Θ como coordenadas de un un punto. Dibujo de las curvas que representan funciones tales como $y = ax^m$, $y = ae^{bx}$, en que a, b, m pueden recibir toda clase de valores. La línea recta. Significación de la *pendiente;* pendiente de una curva en cualquiera de sus puntos (derivada o coeficiente angular de la tangente). Derivada, con el ejemplo de la velocidad de un cuerpo. Ejercicios fáciles sobre los incrementos si-

multáneas de x y de y, y la derivada en el caso de la función $y = a\ x^n$, con ejemplos tomados de la mecánica y de la física.

Determinación de los máximos y mínimos. La resolución de ecuaciones: se pueden dar ideas muy claras sobre la noción de raíces de las ecuaciones, valiéndose del papel cuadriculado. Determinación de las leyes que existen entre cantidades observadas, especialmente de leyes lineales. Correcciones de los errores de observación, cuando las coordenadas son resultado de mediciones experimentales.

En todos estos ejercicios con papel cuadriculado se debe exigir al alumno que determine con exactitud las escalas e inscriba los nombres de las cantidades que figuran en el gráfico. Deben evitarse las escalas claramente inconvenientes. Finalmente, se debe escoger la escala de modo que el dibujo ocupe la mayor parte de la hoja de papel; de ningún modo debe admitirse un dibujo que ocupe solo el borde ó uno de los ángulos del papel.

Geometría — División de la recta en partes proporcionales a otras dadas y otros ejemplos experimentales relativas al libro sexto de Euclides. Medida de los ángulos en grados y en radiantes. Las definiciones del seno, coseno y tangente de un ángulo; determinación de sus valores por métodos gráficos; construcción de ángulos por medio del transportador, cuando se dan en grados o en radiantes, y también cuando se da el valor del seno, del coseno o de la tangente. Uso de las tablas de senos, cosenos y tangentes. Resolución de los triángulos, rectángulos por el cálculo y gráficamente. La construcción de triángulos cualesquiera con datos numéricos o gráficos; determinación del área del triángulo. Las proposiciones más importantes de Euclides pueden ser comprobadas gráficamente: si la proposición se refiere a ángulos, éstos pueden ser medidos con un transportador; si se refiere a igualdad de líneas, áreas o razones, pueden medirse las longitudes con la escala, y los cálculos necesarios se eje-

cutarán numéricamente. Esta combinación del dibujo y del cálculo aritmético puede ser usada libremente para comprobar la verdad de una proposición. Un buen Profesor no dejará de introducir ocasionalmente alguna demostración combinada con la comprobación por medición.

El medio de representar la posición de un punto en el espacio por sus distancias a tres planos coordenados. Como se miden los ángulos (1) entre una recta y un plano; (2) entre dos planos. El ángulo entre dos rectas tiene una significación, ya se corten o no. Que se significa por proyección de una recta o de una figura plana sobre un plano. Proyecciones horizontal y vertical de una recta que forma ángulos dados con los planos coordenados. Significación de los términos «traza de una recta», «traza de un plano».

La distinción entre una magnitud escalar y una vectorial. Adición y sustracción de vectores. Ejemplos experimentales.

En la redacción del precedente programa se han agrupado los artículos con arreglo a los diversos asuntos.

Es claro que no debe entenderse que se han de estudiar precisamente en ese orden; el Profesor podrá ordenar el curso mezclando las materias como mejor le parezca, según la clase de alumnos. Un buen Profesor debe entender que no hay posibilidad de idear un examen por otro que no sea él mismo, capaz de comprobar con verdad el resultado de su enseñanza. Debe tratar de comunicar conocimientos que lleguen a constituir la maquinaria mental de sus discípulos, de tal modo que aquéllos estén seguros de poderla aplicar a los problemas prácticos de todas clases, y convencidos de que no corren mayor peligro de enmohecerse e inutilizarse que sus facultades de leer, escribir o andar.

SEGUNDA PARTE

CURSO AVANZADO

Este curso comprende una labor más completa en todas las materias incluídas en el curso elemental, es decir, una práctica mucho mayor en el cálculo, aplicando fórmulas más complicadas. Geometría demostrada, con el texto de Euclides como base.

Uso de fórmulas aproximadas, tales como

$$(1+a)^n = 1+na$$

cuando a es pequeño respecto a la unidad.

Reglas de Aritmética (como la del interés compuesto, etc.) y de Mensuración, interpretadas como fórmulas algebraicas. Todas las cantidades contenidas en las fórmulas deben ser consideradas sucesivamente como incógnitas.

Práctica en la simplificación de expresiones algebraicas. Descomposición de una fracción en fracciones parciales.

Trigonometría — Algún conocimiento de límites tales como.

$$\lim_{\Theta = o} \frac{\text{sen } \Theta}{\Theta}.$$

Determinación de los valores del seno, coseno y tangente para ángulos mayores que 90°; ángulos complementarios y suplementarios.

Relaciones fundamentales como $\text{sen}^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1$. Cálculo de los valores de *sen* x, *cos* x, e^x y *log* x, usando el desarrollo en serie.

Las fórmulas fundamentales del seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos, es decir:

$$\text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$

y las otras tres análogas. Fórmulas que se deducen de las anteriores, tales como las sumas y diferencias de dos senos o de dos cosenos, y las que ligan las líneas trigonométricas de un arco con las del arco doble.

La regla de los senos $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{a}{b}$ en los triángulos. Y también la relación

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

La expresión del área de un triángulo, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido:

$$A = {}^1/_2\, ab \text{ sen } C$$

La verdad de estas fórmulas debe comprobarse numérica y gráficamente, atribuyendo valores numéricos a las diversas cantidades.

Mensuración — Teoremas de Guldin relativos a las áreas y volúmenes de las superficies y sólidos de revolución. Ejercicios sobre las áreas del segmento y sector del círculo, área de la esfera entre planos paralelos cualesquiera; reglas aproximadas para la rectificación de un arco de circunferencia.

Determinación de centros de gravedad, usando el papel cuadriculado.

Empleo del cálculo para determinar áreas y volúmenes.

Uso del papel cuadriculado — Gráficos de funciones tales como:

$$y = ax^n;\; y = ae^{bx};\; y = a \text{ sen } (cx + d);\; y = ae^{bx} \text{ sen } (cx + d).$$

Dando valores procedentes de la observación a dos variables ligadas por leyes tales como:

$$pv^n = c;\; y = a + bx^2;\; axy = bx + cy,$$

hallar los valores probables de las constantes.

Cuando se sabe que dos variables están ligadas por

una ley conocida, pero algo complicada, determinar una ley más sencilla que, entre ciertos límites, dé valores aproximados a los verdaderos.

Resolución de ecuaciones, usando el papel cuadriculado.

Problemas de máximos y mínimos.

Límites de razones y sumas. — Razón de los incrementos de una variable respecto a otra; método aproximado para calcular la derivada, por ejemplo, en el caso en que se hayan observado experimentalmente varios pares de valores simultáneos de las variables, o hallando gráficamente la *pendiente* (coeficiente angular de la tangente) de la curva dibujada con esos valores.

El término «Coeficiente diferencial» (o derivada) aplicada al límite de la razón de los incrementos, y también el símbolo correspondiente $\frac{dy}{dx}$ en el que x e y representan las variables.

Reglas para hallar la derivada de y con relación a x cuando las funciones que ligan a estas variables son:

$$= a\,x^n;\ y = ae^{bx};\ y = \text{sen}\ x;\ y = \cos\ x;\ y = a\ \text{sen}\ (bx + c);$$
$$y = A \log\ (x + a)$$

Estudio de estas funciones.

Demostración y uso de las reglas de derivación de un producto de dos funciones y de una función de función. Diferenciación sucesiva y diferenciación parcial. Integración por partes, por sustitución y otros artificios sencillos.

Cálculos de máximos y mínimos.

La integración considerada como operación inversa de la diferenciación, y como límite de una suma; explicación de los símbolos

$$\int y\,dx \qquad \text{é} \qquad \int_a^b y\,dx$$

Métodos aproximados para el cálculo de $\int_a^b y\ d\ x$, cuando se conocen valores numéricos simultáneos de x y

de y. Integración cuando se posee una tabla de valores de y correspondientes a otros de x en progresión aritmética.

Integración de las expresiones que siguen:

$$\int a x^n \, dx; \quad \int a e^{bx} \, dx; \quad \int \frac{A}{x+a} \, dx;$$

$$\int A \operatorname{sen}(a x + b) \, dx; \quad \int A \cos(a x + b) \, dx.$$

Resolución de ecuaciones diferenciales sencillas.

En todo lo que sigue, para interesar a los alumnos en su trabajo, se debe hacer uso constante de ejemplos tomados de la parte métrica de la Geometría, de la Mecánica y de la Física.

Geometría. — Como se define la posición de un punto en el espacio por sus coordenadas rectangulares x, y, z, o por sus coordenadas polares r, Θ, φ; relaciones entre x, y, z y r, Θ, φ.

Determinación de los ángulos α, β, γ, de una recta con los ejes coordenados; relación

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Determinación de los ángulos de una recta con cada uno de los planos coordenados.

Dado un plano por sus trazas, determinar sus ángulos con cada uno de los ejes y de los planos coordenados.

Este problema puede ser tratado gráfica o analíticamente.

Representación por sus proyecciones sobre los tres planos coordenados de un segmento de recta, cuya posición y longitud son conocidas.

Determinación del ángulo de dos rectas dadas; ángulo de dos planos cuyas trazas son conocidas. Representación, por sus proyecciones, de la intersección de dos planos cuyas trazas se dan.

Vectores. — Producto escolar y producto vectorial de dos vectores dados, con ejemplos. Álgebra vectorial fácil.

La discusión que siguió a la lectura del discurso y programa de Perry no ofrece bastante interés para que sea oportuno resumirlo, y la omitiré por brevedad.

A pesar de figurar en la Asamblea gran número de matemáticos y profesores adictos a la enseñanza clásica, *ortodoxa*, como dice Perry, ninguno se señaló como opuesto a lo substancial del nuevo método, el cual continuó generalizándose hasta adquirir el gran desarrollo que hoy posee.

En obsequio a la autoridad inmensa de su esclarecido autor, transcribiré la siguiente carta, que fué leída en la Asamblea. Es de Lord Kelvin, y dice así:

« Muchas gracias por su carta de anteayer y por el ejemplar de su discurso de Glasgow, que he leído con interés. Me encuentro agobiado de trabajo, que no puedo aplazar, y ello me impide escribir sobre ese asunto. Creo, en verdad, que su programa es muy bueno. Es muy semejante a la enseñanza que recibí de mi padre. »

XX

LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN SUS RELACIONES CON LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS.—UNA CONFERENCIA DEL PROFESOR PERRY. (1)

Esta conferencia tuvo lugar en Londres el 28 de Noviembre de 1908, bajo la presidencia del profesor *Bryan*, presidente de la *Mathematical Association*, ante un numeroso auditorio compuesto de los *Federated* Associations of London Non-primary Teachers y de la Mathematical Association. Se sabe que el profesor Perry desde hace

(1) De L' enseignement mathematique, 1909.

muchos años persigue la reforma de la enseñanza matemática en Inglaterra, colocándose del punto de vista de los lazos que deben existir entre las matemáticas, la física y las ciencias del ingeniero. Sus tendencias destacan claramente en esta conferencia de la cual vamos a resumir los puntos principales: daremos en seguida una idea general de la discusión a que dió lugar.

Conferencia. — El profesor Perry hace una distinción entre el *matemático* que sólo busca aumentar el bagage de las matemáticas puras, y lo que aplica el *práctico* (el «scientist»), es decir el que se ocupa de las ciencias físicas comprendiendo la física matemática) o que enseña las matemáticas a estudiantes que se destinan a investigaciones físicas. La educación científica debe perseguir los fines siguientes: dar a todos el método científico; preparar al niño o al hombre para el ejercicio de la ciencia aplicada; instruir al futuro profesor de matemáticas y de ciencias; formar algunos matemáticos y prácticos que quizá se distingan. El profesor Perry estima que la primera enseñanza debe ser la misma en esos diversos casos. Después hace una exposición diferencial de los métodos empleados por un matemático y un práctico «scientist» para una misma investigación: el primero, el ortodoxo, insistiendo sobre un rigor matemático en todos los detalles, el segundo encontrando ese rigor no solamente inútil, sino perjudicial cuando hay pruebas físicas. Por ejemplo, la legitimidad de los operadores de Heaviside no puede ser demostrada de una manera rigurosa, pero el profesor Perry hace notar que en la época de Leibnitz de los Bernouilli, de Lagrange de Fourier, se empleaban poderosos métodos de análisis cuya demostración rigurosa sólo fué dada mucho más tarde.

El profesor Perry demuestra, con una serie de ejemplos, que no hay que atribuir demasiada importancia a las demostraciones, pues lo que es más útil para un práctico, es hacer numerosos ejercicios, por ejemplo, con los logaritmos, el teorema de Taylor, los desarrollos en serie de Fourier, las funciones de Bessel.

La geometría deductiva y sus métodos deberían reservarse a la enseñanza universitaria, pues alumnos de mediana inteligencia comprenderán fácilmente las matemáticas por el método de las ciencias físicas, mientras que permanecerían rebeldes a la deducción lógica del matemático. En apoyo de sus ideas cita el éxito de las matemáticas prácticas en las escuelas técnicas. Para llegar a esa reforma habría que suprimir toda intervención del matemático en los exámenes. El fin de la enseñanza no debe ser dar millares de fórmulas para simplificar los cálculos, sinó enseñar el método científico. Si el cálculo mecánico es malo, también lo son las demostraciones sin fin. Por ejemplo, las nociones de velocidad, de aceleración, de trabajo y de momento de una fuerza, difíciles del punto de vista abstracto, son fácilmente comprendidas por los alumnos cuando son expuestas con ejemplos concretos.

El conferencista estima que, en la enseñanza elemental, todas las ramas de las matemáticas debieran confundirse y penetrarse y para ello ser enseñadas por un mismo profesor que, en las clases inferiores, sería el profesor de clase. Ya no habría especialista, cada uno enseñaría las diversas materias, por lo menos incidentalmente; todo profesor de clase debiera ser capaz de enseñar completamente dos materias y conocer suficientemente las otras para de ellas hablar inteligentemente con sus alumnos. El especialista sólo enseñaría a estudiantes de la Universidad.

El profesor Perry critica la manera como gran número de profesores han interpretado y ejecutado las proposiciones de reforma de la asociación británica; no han comprendido el espíritu de esas proposiciones. Expresa en seguida lo que debiera ser la enseñanza matemática y científica de un joven de inteligencia media, tal como la comprende el doctor Armstrong; ideal que por el momento no puede ser alcanzado.

Terminando el profesor Perry emite un voto en favor del desdoblamiento de las clases y de un aumento de las asignaciones.

Discusión.—El presidente profesor Bryan, toma en términos ingeniosos la defensa de los matemáticos entre los cuales se cuenta; éstos no son responsables de lo que hay de defectuoso en el estado actual; no quiere que se les excluya de la enseñanza y de toda intervención en los exámenes, ni tampoco de la política, pues los políticos mucho ganarían si fueran más matemáticos. En cuanto a las cuestiones que conciernen a las materias de enseñanza y a los métodos de la misma, su experiencia le lleva a las mismas conclusiones del profesor Perry. Sin embargo en su opinión, los profesores deberían ser suficientemente especialistas, para poder juzgar de lo que conviene a cada alumno, lo que no sería el caso de un profesor que tuviera nociones superficiales sobre todas las materias. Termina agradeciendo al profesor Perry, que durante muchos años ha combatido por el progreso.

El profesor Godfrey, aunque matemático, considera que las matemáticas elementales ganarían en dignidad al ser consideradas como instrumento para el estudio de las otras ciencias. Sin embargo la geometría tiene un sitio algo aparte. Las propiedades geométricas de los cuerpos son propiedades de la materia tanto como las propiedades físicas. El profesor Godfrey desearía saber lo que el profesor Perry entiende por lecciones incidentes. Quisiera que la mecánica y la hidrostática no fueran separadas y que ellas, lo mismo que la óptica, estuvieran bajo la dirección del profesor de matemáticas, tanto para la parte experimental como para la teórica. El profesor de ciencias, de este modo, ganaría tiempo para las otras materias.

El profesor Jackson, hablando de las cuestiones sobre las que está de acuerdo con el profesor Perry, considera que lo importante no es el método sino el profesor, y que debe combatirse en todas las materias, la apatía, la desatención, la inexactitud y la negligencia. Desearía saber lo que el profesor Perry entiende por matemáticas prácticas. Cree que es, sobre todo, la manera de presentar las

cosas que las hace parecer defectuosas; por ejemplo, las cuestiones concernientes a la resolución de los triángulos pueden ser presentadas a los alumnos de manera tal que comprendan su utilidad y que el empleo de las fórmulas para simplificar los cálculos les parezca natural.

El profesor Alfredo Lodge opina que en las clases inferiores deben buscarse las aplicaciones de las matemáticas a las ciencias, pero que en las clases superiores los alumnos suplirán en cierta medida los trabajos experimentales por la imaginación. En las clases inferiores sería, pues, ventajoso tener cursos de matemáticas experimentales, escogiendo las experiencias en vista de la enseñanza matemática y no de las ciencias físicas. Podría al respecto haber acuerdo entre los profesores de ciencias y de matemáticas para trabajar simultáneamente temas semejantes en muchas ramas.

El punto de vista práctico y matemático es tratado por el profesor Dobbs quien, de un modo general, se manifiesta de acuerdo con el profesor Perry, pero encuentra que exagera en algunos casos, por ejemplo, cuando se refiere a la geometría de deducción. Preconiza la enseñanza de la mecánica, que permite enseñar indirectamente mucha trigonometría. Muestra lo fácil que es dar a niños nociones sobre los pesos, las medidas, las leyes de la gravitación, etc., con instrumentos rudimentarios. Expresa, al terminar, que el profesor Perry ha ejercido una influencia muy saludable en la enseñanza de las matemáticas y en las relaciones entre los matemáticos, los «scientists» y los ingenieros.

El profesor Trickey no cree que el solo hecho de que dos materias sean enseñadas por la misma persona, traiga como consecuencia una correlación suficiente entre ambas. La dificultad en la enseñanza elemental es obtener esta correlación; el comité prestaría grandes servicios si estudiara la cuestión de los programas con ese fin y sugiriendo experiencias que no exijan cálculos demasiado complicados.

El profesor Armstrong aprueba completamente las ideas del profesor Perry y quisiera verlas puestas en práctica. Aunque consejos formulados con demasiada precisión ofrezcan el peligro de conducir a los profesores a un método cristalizado, es tiempo de enunciarlos claramente. Con demasiada frecuencia ha visto que los que se imaginaban aplicar su propio método no lo habían comprendido, lo que también es verdad respecto del método Perry. A su juicio, el punto más importante es el de los especialistas. La mediana de las señoritas y de los jóvenes no alcanza a un nivel intelectual elevado; es preciso, pues, instruir esos alumnos no en vista de un nivel que jamás alcanzarán, sino en vista de lo que ellos tendrán que aplicar en su vida. Cada profesor enseña sin preocuparse de sus colegas. Se necesitaría un director que hiciera concurrir a todos los profesores al mismo fin, del mismo modo que todos los obreros de una fábrica trabajan en una misma obra. Se necesitaría que los profesores y profesoras aprendieran a ponerse al alcance de sus alumnos.

El profesor Nunn vuelve a considerar la cuestión de saber si la enseñanza de las matemáticas debe ser deducida de las otras ciencias, como parece haberlo manifestado el profesor Perry. Esto podría hacerse en cierta medida con experiencias físicas, tales como la determinación de densidades, investigaciones simples de óptica, de mecánica, etc. Ilustra su teoría con un ejemplo tomado de una escuela elemental, aplicando el método de Perry. Según el profesor Nunn la historia de las matemáticas es muy sugestiva para el estudio de los mejores métodos de enseñanza matemática.

El profesor Perry contestando a las críticas que se le han dirigido demuestra que sus opiniones están basadas sobre sus experiencias en los diversos colegios y escuelas en que ha enseñado. Lo que es de desear es el aumento de las asignaciones, el desdoblamiento de las clases y la exclusión de los especialistas y de los examinadores de afuera. A propósito de la enseñanza fortuita de las mate-

máticas, el profesor Perry explica que ciertos temas, no debieran ser tratados con más o menos extensión sino cuando la ocasión se presente incidentalmente en un curso. Lo cual ya se hace para las matemáticas en los cursos de mecánica aplicada de las escuelas de ingeniería. Las matemáticas y la física siempre debieran compenetrarse, y Perry, que aplica este método con sus alumnos, obtiene muy buenos resultados.

Italia

I

LA ENSEÑANZA MODERNA EN ITALIA

En Italia, lo mismo que en el resto de Europa, y por las mismas causas, se hizo sentir la necesidad de reformar la enseñanza secundaria, y no menores resistencias hubo que vencer para modernizarla y hacerla más adecuada a la cultura popular y a los intereses de la economía nacional: como en Alemania y en Francia tuvo la reforma la oposición decidida de los partidarios de la enseñanza clásica, que tenía en su favor la fuerza de la tradición y una gran parte del profesorado.

La ley que lleva el nombre de Gabriel Casati, sancionada en 1859, dió la primera y fundamental organización de la enseñanza, y las sucesivas reformas que en ella se hicieron hasta principios de este siglo, si no aportaron mejoras en la enseñanza secundaria, por lo menos demostraron la necesidad de estudiar muy a fondo la cuestión si se quería llegar a una organización moderna y estable.

Convencidos de esa necesidad, el ministro de Instrucción Pública, en 1905, nombró una Comisión especialmente encargada de estudiar y proponer el proyecto de reforma. La Comisión, compuesta de once miembros, debido a algunos contratiempos, no pudo expedirse hasta mediados de 1909.

Siguiendo el ejemplo de Francia, y el precedente del Comité de los Diez de los Estados Unidos, la Comisión hizo una encuesta para conocer la opinión de los profesores sobre las reformas de la enseñanza secundaria: más adelante, sobre ciertos puntos de importancia haré un extracto del resultado de esa encuesta.

Sintéticamente expongo a continuación el plan de organización propuesto por la Comisión:

Establecer seis años de enseñanza elemental, siendo los cuatro primeros necesarios y suficientes para el ingreso en las Escuelas Secundarias, las cuales comprenderían cuatro tipos, de dos ciclos cada uno.

1.er tipo — Enseñanza magisterial: 1.er ciclo, 3 años en la Escuela complementaria; 2.o ciclo, en la Escuela Normal.

2.o tipo — Enseñanza Liceal: 1.er ciclo, 3 años en el Gimnasio (cultura general popular); 2.o ciclo, enseñanza de 5 años en el Liceo clásico, en el Liceo moderno, o en el Liceo científico.

3.er tipo — Enseñanza técnica media: 1.er ciclo, 3 años en la Escuela técnica; 2.o ciclo, enseñanza en el Instituto técnico (varias secciones de distinta duración, según las necesidades locales).

4.o tipo — Escuelas femeninas de cultura general.

El 5.o y 6.o año elemental constituía la enseñanza de Escuelas complementarias de instrucción popular (diversas secciones y tipos) aplicada a las artes y oficios. La instrucción continúa en las Escuelas de Artes y Oficios, durante dos o tres años.

Se observará que, en cuanto al plan general de organización, la enseñanza liceal propuesta por la Comisión italiana tiene bastante analogía con el de la enseñanza liceal francesa, y también con la de los tres tipos de establecimientos secundarios superiores alemanes.

Conclusiones del informe de la Comisión Real plan de estudios (1)

En relación con los fines que debe perseguir la enseñanza secundaria, la Comisión establece una distinción clara y precisa entre la instrucción media de cultura ge-

(1) Saavedra Lamas. — Reformas orgánicas en la enseñanza pública.

neral y la instrucción media técnica y profesional. En el primer grupo, se califican las escuelas que tienden a formar la mente y el carácter de la juventud, por medio de la cultura general, literaria y científica, con el propósito de ponerla en condiciones de ingresar a la Universidad; en el segundo, las que atienden la instrucción popular y la preparación general y especial de los que irán a dedicarse a la agricultura, al comercio, a la industria, etc.

Tanto en uno como en otro grupo de escuelas, distingue dos grupos sucesivos: el inferior y el superior, distinción tradicional, aceptada por todas las naciones, no sólo porque responde a necesidades sociales, sino porque refleja una diferencia en la fisonomía y carácter general de dos períodos sucesivos de estudios: el inicial, que comienza al egresar el alumno de la escuela primaria, y el final, que le pone en condiciones de elegir lo que más conviene a sus tendencias personales.

La Escuela media, en su grado inferior, contribuye a impartir nociones generales; en su grado superior, prepara el espíritu para el análisis y la abstracción.

. . . .

Para el grado inferior de instrucción media, la Comisión propone:

1.º En cuanto a la escuela de cultura general, que se instituya un instituto, con tres años de estudio, bajo la denominación de Gimnasio, en el que se enseñen, en forma elemental, todas las materias esenciales, para que el alumno que egrese de la Escuela elemental, adquiera en él la cultura indispensable para seguir con provecho los estudios del curso superior. Se excluye del Gimnasio la enseñanza del latín. Este instituto no debe sustituir ni al Gimnasio actual ni a la Escuela Técnica: su cometido emanará de la fusión de ambas.

2.º En lo concerniente a la instrucción técnica y profesional, propone dos tipos de Escuela:

a) Una de preparación a la Escuela profesional de grado superior, denominada Escuela Técnica, también con tres

años de estudios; sus programas, a pesar de su carácter educativo, encierran una orientación especial, indispensable para los que van a dedicarse a ejercer diversas profesiones.

b) Una Escuela Complementaria, cuya duración de estudios no exceda de tres años y que amplíe la preparación elemental de los alumnos, con nociones de cultura general y profesional. Los programas de las materias prácticas se redactarán de acuerdo con las necesidades económicas de cada localidad. Estas escuelas son gratuitas.

En el grado superior de la instrucción media de cultura general, el actual Liceo y la Sección físico-matemáticas, se sustituyen por tres institutos trienales que llevan el nombre de Liceos:

a) Liceo clásico, en el que se da preferencia a las lenguas y literaturas griega y latina, francés, matemáticas, física y geografía;

b) Liceo científico, en el que se enseñará con intensidad: matemáticas, física, química, ciencias naturales, geografía y francés, inglés o alemán;

c) Liceo moderno, que es una forma intermedia entre los dos primeros: en él se imparte enseñanza de latín, matemáticas, física, química, geografía, dibujo, francés, inglés o alemán, ciencias jurídicas y económicas.

En los tres Liceos, a pesar de tener programas y orientaciones particulares, se dictará un curso de idioma nacional y de su correspondiente literatura y otro de filosofía e historia, materias fundamentales que enseñan a razonar al alumno, y lo educan en la escuela de la vida.

Como materias optativas, la Comisión admite: el latín, alemán y la historia del arte.

Tales son las modificaciones propuestas por la Comisión Real para el mejor resultado de la enseñanza media.

II

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LAS ESCUELAS Y EN LOS INSTITUTOS TÉCNICOS

(Por el profesor Scorza del Instituto Técnico de Palermo)

I. *Historia.* — Aunque algunas provincias hayan poseído antes de 1850 escuelas técnicas o especiales, los orígenes de la enseñanza técnica actual son contemporáneos del renacimiento nacional.

La ley Casati, de 1859, definió el fin de esa enseñanza, que es dar la cultura general y especial necesaria a los jóvenes que se destinan a ciertos servicios públicos, al comercio, a la industria, a la agronomía, etc.

La enseñanza de los tres primeros años debe versar sobre: lengua italiana, lengua francesa, *aritmética*, contabilidad, *elementos de álgebra y geometría,* dibujo, caligrafía, geografía, historia, elementos de historia natural, *física* y química.

Para los tres últimos años la ley prevé: literatura italiana, lengua inglesa, lengua alemana, derecho administrativo y comercial, economía política, merciología, *aritmética social, química, física, mecánica elemental, álgebra, geometría plana y estereometría, trigonometría rectilínea,* dibujo y *elementos de geometría descriptiva*, agronomía e historia natural.

Las dificultades que se presentaron cuando se redactó el reglamento que debía explicar la aplicación de la ley condujeron a la creación de dos clases de organismos: las *escuelas técnicas* que, sin ninguna especialización, debían dar una cultura general superior a la instrucción primaria, y los *institutos técnicos,* subdivididos en cuatro secciones especialmente profesionales: *Comercio, Química, Agronomía, Física y Matemáticas:* las enseñanzas del italiano, de la historia y de la geografía, eran comunes a as cuatro secciones.

Un decreto de 1864 vino a modificar la organización de los institutos, no siendo ya cuestión de secciones, sino de *escuelas especiales* o *escuelas reunidas*, y para satisfacer a las necesidades de las diferentes regiones, su número se elevó a 26 (construcción, mecánica, metalurgia, grabado, tipografía, cerámica, tejidos, etc. etc.)

Los alumnos no se inscribieron en número suficiente para dar vida a todas esas escuelas especiales y en 1865 sólo funcionaban ocho.

Una reorganización general se imponía, la que fué realizada por la ordenanza de 1871. Desde entonces los institutos son considerados como establecimientos de instrucción secundaria destinados a preparar rápidamente para los estudios superiores. Las secciones son cinco (física y matemáticas, agronomía, comercio, contabilidad, industria). Durante los dos primeros años, consagrados a la cultura general, la enseñanza es común a todas las secciones.

La sección de física y matemáticas es el centro del instituto; ella debé preparar para el 1.er año de la escuela de ingenieros, es decir permitir evitar dos años de estudios universitarios, y para el efecto se le atribuye un vasto programa de matemáticas y ciencias naturales. Los horarios se elevan hasta alcanzar 41 horas semanales de clase.

Esta confusión entre dos cosas tan distintas como la preparación para los estudios superiores y la cultura técnica especial fué el origen de un período de desorganización durante el cual las reformas parciales se sucedieron rápidamente.

II. *Estadísticas, programas.*—Se cuentan 325 escuelas técnicas y 77 institutos técnicos.

Las estadísticas completas sobre el número de alumnos no son muy recientes (1905-1907): permiten evaluar el número de alumnos de las escuelas técnicas en 60.000, y el de los institutos técnicos en 18.000, frecuentación superior a la de las escuelas clásicas (alrededor de 50.000).

Los estudios duran 3 años en las escuelas técnicas, y después 4 años en el Instituto, estando reunidos en el primer año los alumnos de todas las secciones, escogiendo su dirección al comenzar el 2.º año.

Después de 4 años de escuela elemental puede obtenerse el diploma de madurez que abre el ingreso en la escuela técnica, cuya licencia da acceso al instituto técnico.

Programa de Matemáticas de la Escuela Técnica

1.ª CLASE (4 horas semanales)—*Numeración*—Las cuatro operaciones fundamentales con números enteros. Divisibilidad (criterios). Números primos. M. C. D.; M. C. M.—Fracciones ordinarias y las 4 operaciones. Números decimales, transformaciones de fracciones ordinarias en decimales e inversamente (fracciones periódicas). Sistema métrico. Ejercicios.

2.ª CLASE (4 horas semanales)—*Aritmética*—Potencia. Raíz cuadrada de números enteros, fraccionarios, decimales. Números complejos. Conversión de las medidas. Razones y proporciones. Regla de tres. Particiones proporcionales. Ejercicios.

Geometría—Nociones preliminares. Angulos. Perpendiculares y oblícuas. Triángulo. Paralelas. Paralelogramo. Polígonos equivalentes y sus transformaciones. Teorema de Pitágoras. Círculo, secante y tangente. Angulo inscripto, triángulo y cuadrilátero inscriptos y circunscriptos. Medida de segmentos, ángulos, triángulos, polígonos. Problemas.

3.ª CLASE (3 horas semanales)—*Geometría*—Segmentos proporcionales, triángulos y polígonos semejantes. Medida de la circunferencia y del círculo. Medida de las superficies y volúmenes de los principales sólidos. Ejercicios con aplicación de la regla de extracción de la raíz cúbica.

Cálculo literal—Nociones preliminares. Las 4 operaciones con cantidades enteras y fraccionarias. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones de 1.er grado.

Programa de la sección físico-matemática del Instituto Técnico

1.a CLASE.—(6 horas semanales)—*Aritmética* y *Algebra*—Teoría de las cuatro operaciones con números enteros. Teorema sobre la divisibilidad, sobre los números primos. M. C. D. y M. C. M. Teoría de las fracciones ordinarias. Reducción de las fracciones ordinarias a decimales. Cálculo literal y fórmulas algebraicas. Números negativos. Cuadrado de un polinomio, cubo de un binomio, de un trinomio. Fracciones algebraicas, exponente nulo, exponentes negativos. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones de 1.er grado.

Geometría—Segmentos, ángulos, perpendiculares, oblícuas. Igualdad de los triángulos y polígonos. Paralelas. Paralelogramos. Circunferencia, secante, tangente. Angulo inscripto, triángulo y cuadrilátero inscriptos y circunscriptos. Polígonos regulares. Teoremas relativos a los rectángulos y cuadrados construídos sobre sumas y diferencias de segmentos. Paralelogramos y triángulos equivalentes. Teorema de Pitágoras. Proporciones. Teorema de Thales. División armónica. Triángulos y polígonos semejantes. Transversales de la circunferencia.

2.a CLASE.—(5 horas semanales)—*Aritmética y Algebra*—Constantes y variables, nociones sobre los límites. Fracciones periódicas y sus fracciones generatrices. Números irracionales y sus operaciones. Raíz cuadrada de los enteros y de las fracciones. Cálculos de radicales, exponentes fraccionarios. Ecuación de 2.o grado con una incógnita, discusión. Ecuaciones reductibles al 1.o y al 2.o grado. Razones, teoría de las proporciones. Progresiones aritméticas y geométricas. Interés simple y compuesto. Descuento. Anualidad. Amortización. Logaritmos.

Geometría—Areas del rectángulo, paralelogramo, trape-

cio, de polígonos regulares. Razones de los perímetros y de las superficies de los polígonos semejantes. Razón de la circunferencia al diámetro, métodos de determinación. Medida de la circunferencia, del círculo. Arco, sector, Rectas y planos perpendiculares, paralelos. Diedros, triedros. Prisma, paralelepípedo, pirámide, poliedros, sus volúmenes. Poliedros semejantes, razón de sus volúmenes. Cilindro, cono, tronco de cono, sus volúmenes. Esfera, área de la zona y de la esfera, volumen del sector y del segmento esféricos, de la esfera.

3.ª CLASE. — (5 horas semanales) — *Algebra* — Desigualdades de 1.º y 2.º grado. Máximos y mínimos. Expresiones indeterminadas. Fracciones continuas.

Geometría — Figuras simétricas, semejantes, homotéticas.

Elementos de Geometría Descriptiva — Proyección ortogonal. Representación del punto, de la recta, del plano, de sólidos.

Trigonometría plana — Las funciones trigonométricas. Fórmulas de adición y de sustracción, líneas trigonométricas del arco doble y del semi-arco. Transformación de sumas o diferencias en productos. Determinaciones directas de las funciones trigonométricas de arcos particulares. Tablas trigonométricas, cálculos. Ecuaciones trigonométricas. Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Resolución de los triángulos. Area del triángulo. Radios de los círculos circunscriptos, inscriptos y ex inscriptos. Cuadrilátero inscriptible. Operaciones sobre el terreno. Problema de Pothenot.

4.ª CLASE (5 horas semanales)—*Algebra*—Coordinaciones, permutaciones, combinaciones. Potencia de un binomio. Análisis indeterminado de 1.er grado.

Geometría—Secciones cónicas. Triángulo esférico. Area del huso, del triángulo esférico y de polígonos esféricos. Volumen de la úngula, de la pirámide y del segmento esféricos. Teorema de Euler sobre los poliedros convexos. Poliedros regulares.

Trigonometría esférica—Relación entre 4 elementos, entre 5 y 6 elementos. Resolución de triángulos esféricos.

En las secciones de comercio y de agronomía la enseñanza de las matemáticas cesa al principio del 3.er año.

En la sección de agrimensura, la trigonometría plana y la geometría descriptiva son enseñadas por los profesores de topografía, que agregan los siguientes puntos a continuación del programa de geometría descriptiva: Superficies esféricas, cilíndricas, cónicas, planos tangentes. Secciones planas, desarrollos. Intersecciones. Cortes de piedras. Sombras.

En la sección industrial el programa varía mucho de un Instituto a otro.

Fin de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas y los Institutos técnicos

La escuela técnica, que de técnica sólo tiene el nombre, es una escuela de modesta cultura general, que además tiene como propósito preparar a los alumnos para el Instituto técnico. Debe dar definiciones claras, reglas útiles y numerosas aplicaciones, y persuadir a los alumnos de la exactitud de los teoremas más bien que demostrárselos.

El Instituto vuelve a tomar la educación matemática desde los elementos, y debe hacer una exposición racional y sistemática. Se ha debido concentrar en sus dos primeras clases y en vista de las aplicaciones, un programa correspondiente al de todo el liceo, y no queda para las dos últimas clases más que un programa bastante restringido que permita rever temas demasiado precipitadamente examinados en los primeros años.

Prácticamente el programa de las dos primeras clases, según opinión de numerosos profesores, no puede ser estudiado a fondo en toda su extensión: con bastante frecuencia las teorías de la enseñanza y de la equivalencia en 1.a clase, las irracionales en 2.a, son sacrificados, prefiriendo los profesores rever esas teorías en 3.er año con los alumnos de física y matemáticas.

Frecuentemente los profesores agregan al programa de

3.º y de 4.º año algunos capítulos de su elección: geometría del triángulo, geometrografía, las derivadas y su aplicación a los máximos y mínimos, ecuaciones de 3.º y 4.º grados, probabilidades, determinantes, nociones de historia de las matemáticas elementales.

El relator expresa el sentimiento de que, con demasiada frecuencia, las preocupaciones excesivas de prudencia rigorista entorpezcan a los alumnos en el trabajo personal de resolución de problemas, y que lleguen a ver en una cuestión bastante simple un indescifrable enigma. La utilidad de numerosos ejercicios escritos se desconoce generalmente.

Comparando los textos actualmente empleados y los anteriores, se observa que la enseñanza ha tomado en cuenta trabajos de crítica que han tratado de dar a los elementos de las matemáticas una organización lógica perfecta, y aún hay motivo de lamentar algunas exageraciones en esta dirección, pues algunos textos, por tal causa, se han amplificado con exceso sin que por ello la sustancia misma de las materias estudiadas haya beneficiado.

Quizá admirando demasiado los sistemas lógicos, rígidos, se ha perdido de vista la lucha emprendida (por Perry, Bourlet, Borel) contra el formalismo, y olvidando orientar la enseñanza media hacia la enseñanza superior se ha dejado crear una solución de continuidad entre ambas.

III

LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN LAS ESCUELAS CLÁSICAS

(Relación de U. Scarpis, profesor del Liceo Minghetti de Bolonia)

I. —Los diversos programas de 1867 a 1910

Es en 1867 que fueron publicados por la primera vez reglamentos aplicables a todas las escuelas de Italia, y programas para todas las ramas de la enseñanza.

En los programas de matemáticas, se reconoce de inmediato el espíritu claro y profundo de Betti y de Brioschi.

Hacen empezar el estudio de las matemáticas, en el 5.º curso del Gimnasio, por el 1.er Libro de Euclides y la aritmética racional de los números y de las fracciones con un horario de 5 horas por semana.

El 1.er curso de liceo, (1) con 6 horas semanales, comprende los 2.º y 3.er libros de Euclides, la teoría de la raíz cuadrada y los números inconmensurables, siguiendo después los elementos del álgebra, hasta el cálculo de radicales.

En el curso siguiente se trata de estudiar a razón de 7 $^1/_2$ horas por semana los libros 4.º, 5.º, 6.º, 11 y 12 de Euclides, y la teoría de la medida. Las proporciones, las ecuaciones de 1.º y de 2.º grado, las progresiones; en fin, los elementos de la trigonometría.

Los inconvenientes de esta curiosa repartición de los estudios matemáticos en tres solamente de los ocho cursos clásicos, se revelaron muy pronto. Y en 1869 se recomienda introducir en el 3.er curso del liceo horas suplementarias de matemáticas.

El nuevo horario de 1870 introdujo una hora de aritmética práctica en cada uno de los tres cursos del gimnasio inferior, y 3 horas en los dos cursos superiores. En el segundo curso del liceo ya no hay más que seis horas semanales de matemáticas, pero se atribuyen a esa materia 1 $^1/_2$ hora en el 3.er curso, para poder hacer ejercicios de recapitulación. Permanecen obligatorios los seis primeros libros de Euclides, pero se declara facultativo recurrir a un autor moderno para la estereometría.

Los exámenes de matemáticas comprenden una parte oral y una escrita y se declaran obligatorias para cada alumno en los ocho cursos de estudios, siendo de elección de los profesores los temas para los exámenes de

(1) Es el 6.º año de estudios secundarios.

promoción, imponiéndolos el ministro de Instrucción Pública para el examen final de *licencia liceal.*

La insuficiencia de la enseñanza en el gimnasio inferior hacía muy difícil la tarea de los profesores del gimnasio superior (1) y del liceo, que consideraban el tema del examen final como una espada de Damócles. Sin embargo, las cosas marcharon sin grandes inconvenientes hasta 1878.

El tema del examen final, sección de Julio, fué:

«Encontrar la relación que debe existir entre p, q, p^1, p^1, para que las dos ecuaciones $x^2 + p\,x + q = o$ y $x^2 + p'x$, $+ q^1 = o$ tengan una raíz común», y resultó un verdadero desastre, pues hubo ciudades en que no resultó un solo candidato aprobado.

La prensa se interesó en la cuestión, y llegaron los ecos hasta el Parlamento, y en Abril de 1879 el ministro Coppino encargó a una comisión especial que presentara proposiciones susceptibles de obviar los inconvenientes observados sin disminuir la importancia de las matemáticas en la enseñanza de los liceos.

Caído el ministro Coppino, y con la llegada al poder de su sucesor, Baccelli, empieza un período en que las matemáticas pierden su importancia en las escuelas clásicas.

El ministro Baccelli introduce la geometría intuitiva y el dibujo geométrico en el gimnasio inferior, dejando sólo la aritmética práctica en el gimnasio superior. Restringe los programas del liceo e introduce el horario siguiente para las matemáticas: gimnasio inferior 2 horas semanales, gimnasio superior 1 hora; y en el liceo, para el 1.er curso 5 horas semanales, para el 2.o curso 4 horas y para el 3.o 3 horas semanales.

Se suprime la prueba escrita en los exámenes de pro-

(1) La enseñanza secundaria italiana comprende ocho años de estudios, los cinco primeros en el Gimnasio, y los tres últimos en el Liceo: los tres primeros años del Gimnasio, es el Gimnasio inferior, y los dos últimos constituyen el Gimnasio superior.

moción, y el tema del examen final ya no es impuesto por el ministro, sino improvisado, algunos minutos antes del acto, por el profesor en presencia de toda la comisión sobre un asunto que se determina, abriendo un texto al acaso!

Los resultados de ese sistema no fueron felices. La Comisión Superior para el examen de los trabajos escritos emite cada año nuevas quejas.

Un nuevo reglamento viene en 1884 a dar el derecho al Ministro de reemplazar la prueba escrita de matemáticas por un trabajo de física o de cualquiera otra ciencia, pero los informes no cesan de ser lamentables.

En 1888 el Ministro da a los candidatos el derecho de escoger entre una prueba escrita de griego o una de matemáticas. El horario es, al mismo tiempo, reducido a dos horas semanales en el gimnasio y a tres horas en el liceo.

Los candidatos que, durante los años siguientes, optan por el examen de matemáticas, son muy pocos (más o menos el 10 o/o), pero los exámenes son más satisfactorios que antes.

En 1889 la Comisión Superior, al comprobar el descrédito que la ausencia de sanción amenaza llevar a la enseñanza de las matemáticas, encarece a las autoridades la necesidad de que se introduzca nuevamente un contralor suficiente bajo forma de exámenes obligatorios, tanto que en 1892 el Ministro Villari restableció la prueba escrita obligatoria. Pero el año siguiente el Ministro Martini la suprime en todos los cursos y restringe el horario y los programas.

Desde 1893 la enseñanza de las matemáticas en todas las escuelas clásicas declina, principalmente cuando aparece una distinción entre materias *esenciales* y *secundarias* que coloca a las matemáticas en la 2.a categoría.

El peligro de ese lento trabajo de demolición dió motivo a la fundación de la Sociedad *Mathesis*, creada en 1896 para defender ante el público la enseñanza mate-

mática, pero ya no era posible volver al antiguo estado de cosas; buenos esfuerzos consiguieron una modificación de los programas en 1901.

Una parte del programa liceal (la equivalente a los cuatro primeros libros de Euclides) se adelantó y tuvo emplazamiento en el programa del gimnasio superior. El primer curso del liceo obtiene 4 horas, el segundo curso 3 horas y el tercer curso 2 horas por semana.

Los programas fusionan la enseñanza de la geometría plana y de la estereometría.

La situación no había mejorado sensiblemente cuando en 1904 surgió de improviso el decreto Orlando por el cual los alumnos pueden optar entre el griego y las matemáticas al fin del primer año de liceo.

Vemos cuanto terreno ha perdido la idea de la eficacia educativa de las matemáticas ante los legisladores que se han sucedido en los últimos 30 años. Debemos esperar que la enseñanza de las matemáticas consiga aumentar su prestigio ante el público dándole la convicción de su utilidad, no solamente práctica, sino porque principalmente da una sana educación filosófica capaz de conciliar los sentimientos más delicados de tolerancia y las más audaces aspiraciones del progreso.

IV

UN ENSAYO DE REFORMA DE LOS ESTUDIOS SECUNDARIOS CLÁSICOS EN ITALIA

Extracto de una comunicación del profesor Rodolfo Betazzi, de Turín, publicada por *L'Enseignement Mathematique*, 1905 (1)

. . . .

2. Esas consideraciones, y otras que dejo de lado, han creado entre los profesores italianos una especie de agi-

(1) Se refiere a los resultados que dió el decreto del Ministro Orlando (1904), que permitía que los alumnos de los estudios clásicos pudieran, en los dos últimos años, optar entre el griego o las matemáticas.

tación, y muchos de ellos han dado a conocer su opinión, sea por los artículos de los diarios, sea por cartas dirigidas al señor Ministro. Es lo que también hicieron algunas asociaciones de profesores.

Entre las últimas se señala, a causa de su importancia técnica y de su rol en la cuestión de que me ocupo, la asociación *Mathesis*, que, como se sabe, tiene en vista la mejora de los estudios y de los métodos de enseñanza del punto de vista de las matemáticas, y que antes habría visto las conclusiones de sus estudios acogidas por el ministro en una reforma de los programas.

Su última manifestación ha sido una importante sesión, que tuvo lugar en Milán en Abril de 1905, y en la cual los profesores del Norte de Italia fueron invitados. El fin de la sesión era el examen y la discusión de los siguientes temas:

« I. Consecuencias de la facultad de suprimir el estu-
« dio de las matemáticas en 2.º y 3.ᵉʳ año del Liceo,
« para la educación intelectual y moral de los jóvenes.
« ¿Se ha realizado esa reforma en condiciones de obte-
« ner las ventajas que esperaba el ministro Orlando?

« II. Saber los nuevos programas de matemáticas para
« el 4.º y 5.º año del gimnasio y para el 1.º del Liceo,
« es decir *programa obligatorio* ».

« III. Sobre los nuevos programas de matemáticas para
« el 2.º y 3.ᵉʳ año del Liceo, es decir *programa facultativo* ».

Un número considerable de profesores de escuelas medias y de universidades estaban presentes y tomaron parte en la discusión, presidida por el profesor Pascal, de la universidad de Pavía. Adoptaron por unanimidad las siguientes *resoluciones:*

I. Los profesores de matemáticas del Norte de Italia, reunidos en Milán el 21 Abril 1905 para discutir *las condiciones que las recientes disposiciones del ministro han creado a la enseñanza de las matemáticas en las escuelas clásicas.*

No admiten que un joven sano de espíritu pueda tener una predisposición natural para no aprender cualquiera

de las disciplinas que son la base de la cultura general clásica, y, por consiguiente, juzgando falso y peligroso el principio sobre que se apoya la última reforma de la escuela clásica;

Considerando que el estudio de las matemáticas es necesario, a causa de su función altamente educativa de la inteligencia, como complemento de la cultura dada por los estudios literarios y a causa también de la aplicación siempre creciente que de ellas reciben las ciencias naturales, económicas, sociales y filosóficas;

Considerando también que para la mayor parte de los jóvenes la elección del griego o de las matemáticas sería con frecuencia determinada por circunstancias accidentales (por ejemplo, por el grado de severidad de los profesores respectivos) más bien que por una aversión innata para una u otra de ambas asignaturas;

Declaran que la citada reforma, así incorporada al reglamento liceal, disminuirá la importancia, y más todavía, aniquilará casi la influencia de ambas asignaturas, que son fundamentales en sí mismas y por una constante tradición italiana, con gran perjuicio de la educación nacional.

En fin, *se quejan* de que se haya realizado una reforma tan importante sin haber interrogado en general a las personas competentes y a pesar de las deliberaciones muchas veces establecidas por la Asociación Mathesis.

II. El Congreso juzga que un solo programa de matemáticas elementales racionales.... debe ser obligatorio para todos los alumnos y para todas las clases del Liceo.

III. Por lo que se refiere a una transformación general de la escuela media, que se anuncia próxima, la asamblea expresa el deseo de que esta escuela sea dividida en dos períodos cuadrianuales; y que el segundo período sea exclusivamente reservado — en sus cuatro cursos y para todos los alumnos — al desarrollo de los elementos de matemáticas racionales, con un solo profesor.

IV. El Congreso, después de haber puesto de manifiesto

los defectos de los programas actuales para las matemáticas en las escuelas clásicas, considera que será útil preparar nuevos programas para la parte de las matemáticas obligatorias.

3. El profesor Pascal pronunció un *discurso de clausura* del cual reproduzco el siguiente párrafo:

« Debiáis protestar y lo habéis hecho: protestar contra « el error de un Ministro que.... no ha titubeado en « llevar un ataque tan grave a toda la cultura nacional; « pues.... es atacar las raíces mismas de la cultura el « atacar la ciencia que es la base más sólida, la más « pura, la más duradera de la cultura y de la educación « nacionales, la ciencia cuya mayor importancia reside « menos en lo que ella enseña que en el método que em- « plea, y por consiguiente en la aptitud que da al espí- « ritu del alumno gracias a ella, y en el hábito que por « ella adquiere y que conservará durante toda la vida. »

4. La sesión fué seguida de una interesante conferencia del profesor Loria, de la Universidad de Génova, titulada: *Programas del pasado y programas del futuro.* Véase el resumen.

Si es un profesor universitario que habla en una reunión de profesores secundarios, no hay nada de chocante: las diversas disciplinas matemáticas están encadenadas entre sí, y el que profesa una de ellas no puede desinteresarse de las demás.

El orador no niega que en los últimos años se haya obtenido mejoras sensibles en los métodos de exposición de algunas materias de las matemáticas; y cita como ejemplo los fundamentos de la geometría, la teoría de la equivalencia geométrica, la de los números irracionales, la fusión de la planimetría con la estereometría. Pero observa que es el plan general de los estudios matemáticos en las escuelas secundarias el que no ha cambiado, pues, casi siempre, las modificaciones de los programas consisten en cambios de orden o bien en agregados o supresiones.

El plan según el cual se enseña la geometría, particularmente en los liceos, es todavía, sustancialmente, el de los *Elementos de Euclides*, excelente para la época en que fué concebido y optó para hacer conocer las obras de los grandes geómetras de la antigüedad; pero, no es ciertamente ese el fin que debe tener la enseñanza de la geometría en las escuelas medias de nuestro siglo. El joven, que pasa del Liceo a nuestras facultades matemáticas se encuentra en un campo completamente nuevo y casi imprevisto.

Esas condiciones han cambiado algo en nuestro tiempo, mucho más, sin embargo, por el valor de los profesores que por la bondad de los programas; pero, aquellas persisten todavía, y quizá una de sus causas sea la naturaleza misma de las matemáticas, en las cuales no hay nueva conquista que pueda borrar una sola de las verdades ya adquiridas para la ciencia, y otra causa es el entusiasmo que los italianos tienen siempre para todo lo que es clásico.

Para modificar la enseñanza en el sentido deseado por el orador, es preciso introducir en la enseñanza media algunas ideas generales, que son fundamentales en los cursos superiores: las de *función*, de *correspondencia* o *representación*, de *transformación*, y aún quizá la de *grupo* de operaciones y de transformaciones; se arrojaría así una gran luz sobre muchos capítulos de las matemáticas, y a la vez se podría hacer que esas ciencias fueran menos áridas para los alumnos.

Podría, además, hacerse descender algunas teorías, hoy día consideradas superiores, hasta la enseñanza secundaria, por ejemplo los elementos de la geometría analítica y de la geometría descriptiva, útiles, ésta en la geometría sólida, aquélla en la geometría plana; pues esos elementos (no faltan los ejemplos) fácilmente pueden ser condensados en pocas lecciones no difíciles. Así se hace en otros países.

Como las otras ciencias, también avanzan las matemá-

ticas; lo que era *superior pero accesorio* antes, es actualmente elemental y fundamental. En Francia ya se ha introducido los elementos del cálculo infinitesimal en la enseñanza media. Por lo demás, las ideas fundamentales de este cálculo, que son las de *límite* y de *infinito*, vuelven a encontrarse, visibles u ocultas, lo mismo en muchas cuestiones de matemáticas elementales. Cuando la geometría analítica y el cálculo infinitesimal, por lo menos en parte, hayan penetrado en las escuelas medias, las escuelas superiores podrán desempeñar su rol mucho mejor que ahora.

Puede hacerse la objeción de que los programas de matemáticas son ya bastante extensos, y que, en comparación con las horas que se les asigna para su desarrollo, no puede pensarse en aumentarlos. El orador responde que los actuales programas pueden reducirse mucho. Podría suprimirse la separación demasiado absoluta entre el álgebra y la geometría: eliminarse algunas cuestiones que, actualmente, no tienen razón de ser, por ejemplo, las proporciones, con su serie de reglas variadas: lo mismo puede decirse de algunos capítulos cuya utilidad práctica o lógica es discutible, por ejemplo, el análisis indeterminado de 1.er grado, en el cual son inútilmente complicadas, tratándolas elementalmente, teorías como los máximos y mínimos, la determinación del valor de ciertas formas indeterminadas, las secciones cónicas.

El orador, al terminar, observa que las modificaciones que ha indicado no aumentarán, en su opinión, la dificultad de los estudios de las matemáticas elementales; y que, por lo demás, si la dificultad en realidad debiera aumentar, habría una verdadera ventaja, pues daría por resultado disminuir el número de jóvenes que recorren el camino de los estudios, sin tener para ellos natural inclinación.

V

CONCLUSIONES VOTADAS EN EL 3.er CONGRESO DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE LAS ESCUELAS SECUNDARIAS ITALIANAS—NÁPOLES, 1903 (1)

Este Congreso lo mismo que los dos anteriores, fueron organizados por la *Asociación Mathesis*; los temas que debían discutirse habían sido previamente fijados por el comité de la Asociación y habían sido examinados en el curso del año escolar por asambleas parciales de los profesores, reunidas en diversas ciudades de Italia.

Las conclusiones de esas asambleas, publicadas en los informes elaborados por tres profesores, fueron distribuídas de antemano a los miembros del Congreso.

El primer tema era: « *Estudiar las causas por las cuales* « *los alumnos de las escuelas medias aprovechan poco el es-* « *tudio de las matemáticas, y los remedios que a ellas puede* « *aplicarse* ».

Se observó en el Congreso que hay escuelas en que los alumnos aprovechan bastante sus lecciones; pero esto principalmente se verifica en las escuelas donde la enseñanza de las matemáticas es bastante especializada, y no en las demás, que tienen en vista la cultura general como, por ejemplo, en las escuelas clásicas. Expongo a continuación las conclusiones resultantes de la discusión, las que también pueden interesar a los profesores de otros países.

Examinando las causas del escaso provecho que son comunes a todas las materias, se ha deducido:

1.º Que es necesario que los cursos no tengan más de 25 alumnos cada uno;

2.º Que los programas, el número y la duración de las lecciones deben ser regulados de manera que se evite el exceso de trabajo mental;

(1) Traducido de L'enseignament mathematique, 1904,

3.º Que los programas y los reglamentos deben ser cambiados con la menor frecuencia posible;

4.º Que mediante la institución de escuelas de agricultura, de comercio, de industria, etc., bien organizadas, con carácter práctico, debe reducirse el número de alumnos que actualmente frecuentan las escuelas de cultura general y particularmente las escuelas clásicas.

Respecto de las causas del poco provecho que son especiales a la enseñanza de las matemáticas, se admitió:

1.º Que los textos deben ser escritos de un modo sintético y con explicaciones cortas y muy claras.

2.º Que el profesor debe servirse efectivamente del texto que haya elegido, a fin de que el alumno pueda encontrar, cuando lo estudia en su casa, la lección que ha oído en clase; y que donde el profesor juzgue que algunos cambios son necesarios, él mismo debe suministrar el texto de las lecciones a sus alumnos;

3.º Que en clase no debe abusarse de largas explicaciones y de las discusiones, pero que debe destinarse la mayor parte de la lección a los ejercicios y a los repasos, haciendo el curso interesante por medio de ejercicios prácticos y aplicaciones a las otras ramas de los estudios;

4.º Que en las escuelas no debe colocarse las matemáticas en un grado inferior al que tengan las otras asignaturas;

5.º Que la admisión en las escuelas medias debe hacerse por medio de un examen de ingreso especial y solamente para los jóvenes que hayan llegado a la edad conveniente, que fijará el reglamento;

6.º Que debe mejorarse la enseñanza matemática desde la escuela primaria;

7.º Que en los exámenes de promoción y de licencia los alumnos deben ser sometidos a dos pruebas, una oral y la otra escrita, y que ésta no debe hacerse sino cuando las alumnos hayan sido aprobados en la otra prueba.

El segundo tema era el siguiente: «*Extensión y límites*

de la enseñanza de las matemáticas en los dos grados — inferior y superior — de las escuelas medias».

Para comprender bien la significación de este tema, debe tenerse en cuenta que en Italia (fuera de las escuelas especiales para las artes, los oficios, etc.), hay tres clases de escuelas de cultura general: las escuelas clásicas, las técnicas y las normales. En cada una de esas escuelas se tiene un curso *inferior* de tres años (gimnasio inferior, escuela técnica, escuela complementaria para señoritas) y un curso superior (gimnasio superior y liceo, instituto técnico, escuela normal), que respectivamente es de 5, 4, 3 años. — Las matemáticas racionales forman parte de los programas de los cursos superiores. El tema del Congreso se proponía fijar un programa *único* para cada uno de los dos grados inferior y superior, que hubiera debido representar lo que era necesario aprender en todas las escuelas, salvo las ligeras modificaciones indicadas por las especiales exigencias de los diversos fines de las tres ramas de la enseñanza media.

El Congreso no juzgó conveniente fijar ese programa *único* para los cursos superiores y se limitó a establecer para los cursos inferiores, para los cuales pudo ponerse de acuerdo en lo que respecta al fin y a la extensión de las matemáticas que en aquellos se estudian.

Véase el programa de *Aritmética práctica* que se adoptó:

« *Propiedades simples y ejecución de las cinco primeras* « *operaciones con enteros y fracciones. — Extracción de la* « *raíz cuadrada y cúbica con una aproximación decimal. —* « *Las nociones más elementales sobre la divisibilidad, sobre* « *los números primos, el metro cuadrado y el metro cúbico —* « *Sistema métrico decimal. — Medida de los ángulos y del* « *tiempo. – Problemas sobre las magnitudes proporcionales* ».

Además, se declaró que: « *El fin de la Aritmética práctica en las escuelas medias inferiores debe ser, aprender el* « *cálculo fácil y rápido de los números y habituar a los alumnos a la solución razonada de los problemas de la vida* « *práctica* ».

Para la Geometría se adoptó el programa siguiente:
« *Nociones elementales sobre la igualdad, la equivalencia,*
« *la semejanza.—Construcciones fundamentales para el di-*
« *bujo geométrico.—Medida de las líneas, de los ángulos,*
« *de las superficies, de los sólidos* ».

Esos programas son, con poca diferencia, los que actualmente [1] están vigentes en los gimnasios inferiores.

El tercer tema era: « *El doctorado en matemáticas debe* « *ser considerado como necesario para los profesores de las* « *escuelas medias* ».

Este tema fué propuesto a consecuencia de una discusión que tuvo lugar en el precedente Congreso, sobre la cuestión, de si el profesor de matemática de las escuelas medias debe ser doctor, o bien si debe, después de haber frecuentado los cursos de la Universidad, recibir un diploma que difiera del doctorado.

El Congreso reconoció que la diferencia entre los doctores y los profesores habilitados para la enseñanza tiene su origen muy lejano, y descansa sobre la distinción entre la función científica y la función didáctica del profesor; pero estableció que, a causa de las condiciones actuales de la enseñanza y de la necesidad de mantener el saber de los profesores así como su grado social a una altura conveniente, no debía cambiarse el sistema adoptado en Italia, es decir el *doctorado* para los profesores de las escuelas medias. Pero, además, se admitió, que debe exigirse de ellos el *diploma de magisterio*, obtenido en las escuelas en las cuales, efectivamente, el profesor sea bien preparado para enseñar las matemáticas según las necesidades prácticas de la escuela, y que reciba también cierta cultura en otras materias fuera de las matemáticas, que sirvan para prepararlo para ese fin, y que puedan darle la aptitud para la enseñanza de las demás materias científicas, que él debe efectivamente profesar en algunas de las escuelas medias inferiores.

(1) 1904.

VI

OBSERVACIONES Y PROPOSICIONES RELATIVAS A LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS ELEMENTALES, MEDIAS Y NORMALES.

(Por A. Padoa, profesor del R. Instituto Técnico de Génova)

El autor se propone examinar los criterios que deberían presidir la determinación de los programas y de los mêtodos de enseñanza en las diferentes escuelas, subordinándolos al fin de cada una de ellas.

1.º Cuando una escuela sirve de preparación a otra, son los profesores de la segunda que deberían establecer el programa mínimo a estudiar en la primera, y en nada habría que separarse de ese mínimo.

Por ejemplo, los profesores de enseñanza secundaria piden a la escuela primaria que habitúe a los alumnos a ejecutar con seguridad y rapidez las operaciones fundamentales con los números enteros y decimales, y ponerlos bien prácticos en el cálculo mental, pero sacarían del programa primario la geometría, las medidas de volumen, etc., cuya introducción prematura sólo puede desalentar a los alumnos.

2.º Podría temerse que, con un programa tan reducido, la escuela elemental no llenara su rol de preparación para las más humildes manifestaciones de actividad agrícola, industrial o comercial; pero hay que observar que tampoco lo llena con el actual programa, y que habría que completar (para los que no estudien ulteriormente) con escuelas profesionales inferiores diversamente especializadas.

3. En la Escuela Media las matemáticas debieran ser enseñadas en tres cursos, sucesivos: *preparatorio, deductivo, complementario.*

Los dos primeros, de tres años cada uno, debieran ser

comunes a todas las divisiones de la escuela media, mientras que el programa y la duración del 3.er curso deberían variar para conformarse a las exigencias de las diferentes divisiones.

4. En el curso *deductivo*, que debe constituir el núcleo de la cultura matemática en la *escuela media*, se aplicaría el siguiente programa:

Aritmética y Álgebra. 1.er año — Estudio deductivo completo de las diferentes especies de números (del número natural absoluto al número racional relativo) y de sus operaciones.

Numerosos ejercicios de cálculo literal.

2.º año — La división de segunda especie (determinando el cociente y el resto) con los números enteros absolutos y con polinomios ordenados según las potencias decrecientes de una magnitud. Casos de divisibilidad de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$. Cociente y resto de la división de un polinomio por $x \mp a$. Los números naturales considerados como polinomios, justificación de las reglas para efectuar las operaciones fundamentales. Cambio de base de numeración. Dependencias de los criterios de divisibilidad y de la base. Números primos. Teoría del M. C. D. y del M. C. M.

3.er año —Números decimales y fracciones generatrices. Números irracionales, números complejos. Extracción de la raíz cuadrada con una aproximación dada. Cálculo de radicales.

Teoría completa de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

5.º Como ese programa exige mayor madurez intelectual que preparación especial, se utilizará el curso *preparatorio* para que los alumnos se habitúen al cálculo aritmético, y en él deberían adquirir mucha seguridad y rapidez.

Véase un esquema del programa que debería recorrerse únicamente por ejercicios, y por numerosos problemas fáciles.

1.er año — Reglas prácticas de divisibilidad. Nociones sobre los números primos. Investigación del M. C. D. y del

M. C. M. por los dos métodos. Transformación de fracciones y de números fraccionarios. Suma de fracciones. Diferencia de dos fracciones. Producto y cociente de una fracción por un entero.

2.º año — Transformación de fracción ordinaria en fracción decimal e inversamente, fracciones periódicas. Proporciones, investigación de la cuarta proporcional, de la media proporcional.

3.er año — Números negativos, aplicación a la determinación de un punto sobre una recta, al termómetro, a débitos y créditos, a ganancias y pérdidas, etc. Adición y sustracción de números de iguales signos y de signos contrarios.

Empleo de las letras para resumir en fórmulas las reglas aprendidas en el curso de aritmética práctica.

Durante todo ese curso el profesor no dará demostraciones rigurosas, sino solamente explicaciones intuitivas que no hará repetir a los alumnos, debiendo éstos hacer solamente ejercicios, repetir las reglas y resolver los problemas.

6.º Es a propósito del programa de *Geometría* que el autor se separa de la tradición.

A causa de la impenetrabilidad de la materia, el «movimiento» no permite siempre comprobar la igualdad geométrica, por ejemplo, el escultor que quiere comprobar la identidad de la estatua que acaba de sacar del mármol y del modelo que debía copiar, verificará, con el auxilio del compás de espesor, que los pares de puntos de la estatua y del modelo son superponibles.

El autor sólo acepta el sistema de definiciones geométricas en el cual no se considera como elementos primitivos sino los puntos y la *relacion de igualdad entre pares de puntos.*

Demostró en 1900 la suficiencia de ese sistema que ha recibido notables desarrollos en recientes memorias de Peano, Levi y Pieri.

7. Ese método, necesariamente *fusionista,* suprime la

antigua subdivisión de la Geometría en Planimetría y Estereometría, para sustituir una repartición basada sobre las *relaciones* que las figuras presentan.

Proyecto de programa para el curso *deductivo*.

1.er año — Concepción de igualdad geométrica. Ideas primitivas. Definiciones. Postulados. Condiciones de igualdad. Relaciones mutuas de posición (perpendicularidad y paralelismo de rectas y de planos, puntos comunes a rectas, a circunferencias, a planos, a superficies esféricas, etc.) Construcciones geométricas fundamentales. Propiedades de los triángulos y triedros, de los paralelogramos y paralelepípedos, de los polígonos y poliedros regulares.

2.o año — Teoría de la equivalencia de los polígonos y de los poliedros. Teoría euclídea de las proporciones entre magnitudes. Concepción general de semejanza y aplicación a los polígonos y poliedros. Transformación de una proporción entre segmentos en equivalencia de rectángulos, e inversamente, aplicación al enunciado de las dos maneras posibles y a la demostración de algunas proposiciones (perpendicular bajada del vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa; secantes y tangentes, etc.)

3.er año — Definición de la longitud de la circunferencia como magnitud intermediaria entre los perímetros de los polígonos inscriptos y circunscriptos, superficie de un cilíndro, de un cono. Area de un círculo, volumen de un cilindro, de un cono.

Superficie y volumen de la esfera. Teoría de la medida.

Las funciones seno, coseno, tangente; las igualdades.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$$

Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Teorema del seno.

8.o Cuando varias proposiciones sucesivas se demuestran de la misma manera, podrá limitarse a pedir que

el alumno demuestre la primera, pero sería útil que el libro de texto contenga, sin embargo, todas las demostraciones para que los alumnos no sean tentados a considerar como postulados algunas de esas proposiciones.

9. La tarea de la enseñanza geométrica *preparatoria* será desarrollar la intuición geométrica, hacer comprender la idea de igualdad, familiarizar al alumno con los movimientos geométricos fundamentales (traslación, rotación) y con los hechos geométricos que encontrará como postulados. Todo eso con el auxilio del dibujo (sobre papel blanco y cuadriculado); con el auxilio de papel doblado, recortado, etc.

Para que esa tarea de la enseñanza preparatoria pueda ser eficazmente llenada, es preciso que el profesor de ese curso sea el del curso deductivo. La cohesión es más necesaria entre el curso preparatorio y el curso deductivo de una misma rama que entre la aritmética y la geometría en un mismo curso.

Es necesario que el profesor pueda subordinar su enseñanza del curso preparatorio a las exigencias del curso deductivo.

Habiendo así recibido el curso preparatorio una tarea determinada, no podrá ya servir de preparación para las escuelas profesionales de segundo grado, ni por sí solo formar una pequeña escuela de cultura general, debiendo esos dos últimos roles ser devueltos a otros establecimientos.

10. Los alumnos de todas las tendencias habrían recibido la misma enseñanza en el curso *preparatorio* y en el curso *deductivo,* mientras que existiría un programa particular para el curso *complementario* en cada uno de los tres liceos: clásico, moderno, científico.

11. Durante el 1.er año, los alumnos del liceo *clásico* no estudiarían matemáticas, pero tendrían clase de ellas dos horas semanales durante el 2.o año (la última clase u 8.o año).

La enseñanza sería filosófica: sería necesario examinar los principios de la aritmética y del álgebra, analizar la

formación de los primeros conceptos, observar el encadenamiento de las definiciones, hacer comprender que los postulados son necesarios, pero también lo que su elección tiene de relativamente arbitrario. Volviendo a considerar algunas demostraciones características podría hacerse sentir el valor y la belleza del método deductivo. Habría que agregar algunas nociones históricas.

12. Desde hace algunos años, expresiones y símbolos, que sólo los matemáticos habían utilizado hasta entonces, han penetrado en todos los dominios y se han hecho necesarios a los biologistas, a los economistas, etc. Es por esa razón que el curso complementario del liceo *moderno* deberá (en 2 años y 2 horas semanales) familiarizar a los alumnos con las nociones de *función*, *correspondencia*, *límite*, *probabilidad*, etc. Deberá enseñárseles los primeros principios de la geometría analítica y del cálculo diferencial e integral.

13. En el liceo *científico*, el curso complementario comprendería 4 horas durante 2 años.

El programa, en cuya determinación deberían colaborar los profesores de la Universidad, contendría una parte *obligatoria:*

Teoría de los números irracionales. Teoría y ejemplos de los logaritmos: progresiones. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones reductibles al 2.º grado. Trigonometría plana y esférica. Aplicación del álgebra y de la trigonometría a problemas geométricos.

Y una parte *facultativa*, a elección del profesor:

Fracciones continuas. Cálculo combinatorio, potencia de un binomio. Probabilidad. Análisis indeterminado. Máximos y mínimos. Elementos de la geometría del triángulo. Planos, ejes, centros radicales. Geometría de la esfera. Secciones cónicas.

14. Los alumnos de las escuelas *normales* deberían seguir también el curso preparatorio y el curso deductivo: después, en un curso complementario, examinar los programas de la escuela elemental, comentar y comparar los textos, preparar series de ejercicios, dar lecciones, etc.

Toda esa enseñanza debería ser confiada al profesor de matemáticas más bien que al de pedagogía.

VII

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS CLÁSICAS

(Relación de G. Fazzari, profesor del Liceo Humberto I, de Palermo)

Los profesores que enseñan las matemáticas en las escuelas medias han constituído en 1895 la Sociedad *Mathesis* con el objeto de perfeccionar la enseñanza del punto de vista científico y didáctico; su consejo directivo propuso a los miembros diversas cuestiones que fueron discutidas en sesiones parciales en diferentes ciudades de Italia y en el Congreso de Turín en 1898.

El ministro Gallo se dirigió a la *Mathesis* en el momento de determinar los nuevos programas de matemáticas, establecidos por decreto de Octubre de 1900.

Esos programas agregan, para el gimnasio inferior, la aritmética práctica, algunas nociones intuitivas de geometría y de los elementos del dibujo geométrico. Retardan la teoría de los números primos, de la divisibilidad, de las fracciones periódicas, del gimnasio superior, llevándolas al 3.er año del liceo (1), pero dejan en 4.o año la operación con los números enteros, el M. C. D. y el M. C. M., y en 5.o las fracciones.

La enseñanza de la geometría racional, en la extensión comprendida en los tres primeros libros de Euclides, se da en los dos últimos años del gimnasio (4.o y 5.o), y el resto de la materia, en los límites de los antiguos programas, se da en los dos primeros años del liceo (6.o y 7.o años).

El álgebra está repartida entre las tres clases del liceo;

(1) 8.o año de estudios secundarios.

en 3.er año se encuentran los números irracionales, las progresiones, los logaritmos.

La trigonometría se enseña en el 3.er año liceal.

Esos programas que pueden satisfacer a los que consideran la enseñanza de las matemáticas en las escuelas clásicas como un medio de cultura general, como una gimnasia intelectual, no permiten absolutamente que los profesores den vida a la enseñanza, mostrando con numerosas aplicaciones que las matemáticas sirven para interesantes investigaciones de orden práctico.

El profesor Betazzi ha expuesto en una nota titulada «*Las aplicaciones de las matemáticas*» algunos temas que podrían ser introducidos en la enseñanza, por ejemplo: Representación gráfica de los números irracionales — Desarrollo de poliedros — Reducción de dibujos a escalas dadas — Determinación de la altura de un edificio — Problemas sobre las cartas topográficas, distancias, etc. — Uso del pantógrafo — Curvas representativas de ciertos fenómenos, etc.

Una de las más importantes cuestiones que sobre los métodos de enseñanza fueron sometidas a la discusión de sus miembros por la Sociedad *Mathesis*, es la oportunidad de la fusión de la geometría elemental.

En el Congreso de Turín convinieron entender por fusión el método didáctico que consiste en estudiar simultáneamente, desde el principio, las cuestiones afines de la geometría plana y de la estereometría, para aplicar en seguida los métodos de una o de otra, a fin de obtener las mayores ventajas posibles.

Los profesores secundarios se dividieron en dos campos, a favor y en contra de la fusión, a pesar de la entusiasta defensa del profesor *De Amicis* titulada *Pro-fusión*. El Congreso pidió que los programas sean modificados de modo que dejen a los profesores la libre elección entre el método separatista y el método fusionista.

Los programas de 1900 permiten seguir el método fusionista desde el 1.er año del liceo, es decir, después que

los alumnos hayan estudiado los tres primeros libros de Euclides, de acuerdo con el método utilizado por Veronese en sus *Elementos de Geometría.*

En el Congreso de Livorno en 1901, terminó la discusión proclamando la necesidad de introducir en todos los exámenes una prueba escrita de matemáticas a fin de obtener de los alumnos más trabajo y mayor interés. Sería este el medio de poner fin al descenso de nivel de la cultura matemática en los jóvenes que de los liceos pasan a las facultades de ciencias, descenso denunciado de todas partes, sin que las causas sean bien comprendidas.

El poco provecho que los alumnos sacan de la enseñanza de las matemáticas fué también objeto de múltiples discusiones.

El ministro Leonardo Bianchi comprendió que eso no podría remediarse con algunos retoques de detalle, sinó que se imponía una reorganización profunda de la escuela media; designó una comisión de profesores de letras y de ciencias para estudiar esta cuestión. La comisión presentó su informe, y es al Ministerio y al Parlamento que incumbe el deber de realizar una reforma que haga de la escuela media un instrumento poderoso de cultura y de progreso.

En el Congreso de Nápoles de la Sociedad *Mathesis,* en 1903, el profesor Enrique Naunei presentó un informe sobre las causas del escaso progreso de los alumnos de matemáticas. Denunció causas *generales,* relativas a todas las enseñanzas (demasiados alumnos en las clases; excesivo número de horas diarias en las lecciones; vacaciones demasiado largas; cambios demasiado frecuentes de las disposiciones reglamentarias; cambios de profesores): y causas *particulares,* solamente relativas a la enseñanza de las matemáticas (dificultad particular de la materia; repartición de las cuestiones sin tener en cuenta el grado de inteligencia de los alumnos, etc.).

Mientras que la Sociedad *Mathesis* se esforzaba por

mejorar la eficacia de la enseñanza matemática en los liceos, el decreto de 1904, permitía que esa enseñanza fuera facultativa en las dos clases superiores, pudiendo los alumnos elegir entre el griego y las matemáticas. El Congreso de Milán se pronunció severamente respecto de esta reforma. (1) En 1906 los profesores de 113 liceos fueron invitados a expresar su opinión a ese respecto: 13 se mostraron favorables, 28 declararon demasiado corto el tiempo de ensayo para formar juicio y 72 se manifestaron contra la opción.

Una cuestión muy discutida por los miembros de la *Mathesis* es la referente a la elección del método más oportuno para introducir el estudio de las proporciones.

Unos son partidarios del método de Euclides que, sin definir la relación de dos magnitudes homogéneas, introduce la relación como noción nueva, independientemente de la noción de número fraccionario o irracional. Otros, después de haber estudiado la teoría de los números irracionales deducen el estudio de las proporciones de la teoría de la medida.

El profesor Loria ha contestado a algunas cuestiones discutidas en *L'enseignement mathematique* y propone la abolición del método euclídeo. El informe termina por algunas proposiciones que el autor cree sean susceptibles de mejorar la situación. Pide aumentar el número de horas de matemáticas en el gimnasio, suprimir los exámenes trimestrales y restablecer los exámenes de fin de año, escritos y orales.

Pide que se comience más pronto el estudio de los números fraccionarios y de la medida de las figuras, para que sea posible estudiar abundantemente la proporcionalidad en 2.º y 3.er año, así como el cálculo con un número determinado de decimales exacto.

En 4.º y 5.º año, introduciendo las cantidades negativas y el cálculo literal, se pondría a los alumnos en

---

(1) Véase págs....

condiciones de saber resolver los sistemas de ecuaciones lineales y la ecuación de 2.º grado con una incógnita. La aritmética racional sería retardada para no reaparecer sino en el liceo, y daría sitio a las coordinaciones, permutaciones y combinaciones, lo que permitiría desarrollar las potencias enteras del binomio en el 1.er año del liceo.

Al programa de geometría del liceo habría que agregar la teoría de la homotecia, de la inversión; en 3.er año los elementos de la geometría analítica cartesiana, la representación gráfica de las funciones.

VIII

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS LICEOS MODERNOS DE ITALIA (1)

Acaba de instituirse en Italia, al lado de la escuela clásica (latín-griego) un *liceo moderno* (latín-lenguas modernas) en el cual la enseñanza científica tiene mayor desarrollo. El Ministro de Instrucción Pública ha encargado al profesor *Castelnuovo,* presidente de la *Sociedad Mathesis,* la redacción, de acuerdo con las opiniones del ministerio, de los programas de matemáticas para las dos últimas clases de ese liceo, que son frecuentadas por alumnos de 16 a 18 años. En la redacción de esos programas el profesor Castelnuovo ha debido, naturalmente, tener en cuenta tradiciones de la enseñanza italiana, conformes con los Elementos de Euclides, y las tendencias de la mayoría de los profesores, favorables al método exclusivamente deductivo.

Es, pues, con prudencia que ha introducido en esos programas las ideas modernas de la enseñanza matemática media, esperando que la experiencia ponga de ma-

(1) De *L'inseignement mathematique,* 1913.

nifiesto la oportunidad de dar mayor amplitud a esas ideas. Los programas propuestos por el profesor Castelnuovo representan, sin embargo, una innovación con relación a los programas hasta ahora vigentes en Italia.

El programa de la penúltima clase del liceo (4 horas de matemáticas, alumnos de 16 a 17 años) empieza por la medida aproximada de las magnitudes; la comparación entre esas medidas y las medidas teóricas conducen a la cuestión de los inconmensurables y de los números irracionales. Se introducen en seguida las nociones de coordenadas cartesianas, de representación gráfica y de función; ésta, deducida al principio de las ciencias de observación, es precisada después por la expresión matemática en los casos más simples. Las nociones de límite y de derivada, con sus principales interpretaciones matemáticas y físicas, están expuestas al fin del programa de ese curso.

El programa de la última clase del liceo (3 horas de matemáticas) comprende la teoría de los logaritmos, la trigonometría plana con sus aplicaciones elementales, la medida aproximada de las superficies planas por la división en pequeños cuadrados o rectángulos, a la que se relaciona la noción de integral definida y la evaluación de las superficies y volúmenes de los sólidos más simples.

Los programas son seguidos de *consideraciones generales*, de las cuales extractamos los siguientes párrafos:

« Las exigencias de la vida moderna y una visión más « amplia de la ciencia en su conjunto, obligan a estre- « char los lazos que unen las matemáticas a las ciencias « experimentales y de observación. Es necesario que el « alumno al salir del Liceo tenga la persuasión de que « entre las ciencias y las matemáticas existe un lazo ín- « timo, que la experiencia y el raciocinio, son ambos ne- « cesarios, aunque no siempre en la misma medida, para « el enriquecimiento de cualquier dominio de la ciencia. « Es preciso que sepa que las diferentes ciencias siempre « se han prestado un auxilio recíproco, y que el renaci-

« miento de las matemáticas en el siglo XVII está unido « al resurgimiento de las ciencias experimentales.

« El profesor deberá evitar dos peligros: el de caer en « un grosero empirismo y el de satisfacer los caprichos « de un sentido crítico exagerado. El método empírico « dejando ignorar los lazos que unen los hechos observa- « dos y las teorías que con ellos se relacionan, quitaría « a las matemáticas su valor educativo y disminuiría la « atracción que ellas deben ejercer sobre aquellos alum- « nos en que dominan las facultades lógicas. Una ense- « ñanza en la que se introdujeran todas las sutilezas de « la crítica moderna no sería accesible más que a un « corto número de alumnos y les daría una idea unilate- « ral de la ciencia.

« El *justo medio,* tal es la cualidad que ante todo debe « recomendarse, en la aplicación de este programa, a los « profesores encargados de desarrollarlo. Constantemente « deberán asegurarse, por medio de interrogaciones y ejer- « cicios hechos en clase y a domicilio, que son seguidos « por la mayoría de los alumnos, y adaptarán su ense- « ñanza a la inteligencia media de la clase ».

IX

INSTRUCCIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES

(Circular del 31 de Mayo de 1905)

. . . .

VII. — Igual recomendación [1] debe hacerse, con mayor razón, en lo que respecta a la enseñanza de la *matemática* en todas las primeras clases de las escuelas medias inferiores. Lo que más desorienta a los alumnos, que

(1) V. — Respecto de la enseñanza de la geometría debe tenerse en cuenta que los alumnos del 4.º año elemental tienen escasa preparación sobre esta materia.

ingresan en la escuela secundaria, en el estudio de esa materia, es ciertamente, la diversidad de método. En las escuelas elementales los niños adquieren los primeros conocimientos de aritmética y de geometría empíricamente: en la escuela secundaria se pretende pasar de inmediato a los razonamientos y a las demostraciones, y lo que es peor, partir de principios generales y abstractos, para descender después a los casos particulares.

De tal manera se olvida que el niño no tiene ningún conocimiento del procedimiento deductivo, y, además, que las palabras *axioma*, *teorema*, *corolario* y otras, no sólo son nuevas para él, sino que responden a conceptos demasiado generales y elevados, para que de ellos pueda darse cuenta al principio de sus estudios. Por eso, gran parte de las enseñanzas de aritmética y geometría, en las que se aplica el método deductivo caen en el vacío, cansan inútilmente la mente, contribuyen a difundir y fortificar la errónea creencia de que la matemática, aun en sus partes elementales, no es materia al alcance de todos.

Convendrá, pues, huir de exposiciones y demostraciones hechas de un modo abstracto, y continuar con el método intuitivo, y empleando simples razonamientos inductivos desarrollar la enseñanza de las verdades exigidas por el programa.

Instrucciones para la enseñanza de la matemática en el Liceo moderno

Los programas de matemática del Gimnasio superior y de la primera clase liceal son los mismos para la sección clásica que para la moderna. Sin embargo, el enseñante de esta última, al desarrollarlos, y en la elección de los ejercicios, deberá tener presente la tendencia que después se sigue en la segunda y tercera clase liceal [1]; y, en consecuencia, tendrá cuidado de preparar gradual-

(1) 7.° y 8.° años de estudios secundarios.

mente los alumnos y de aplicar los conceptos a que estas instrucciones se refieren.

Los programas de la 2.ª y 3.ª clase del *Liceo moderno* representan, a este respecto, una innovación frente a los programas que desde hace 50 años rigen en nuestras escuelas clásicas. Por ésto, es necesario exponer qué criterios han inspirado estos nuevos programas y entre qué límites debe desarrollarlos el enseñante.

Las exigencias de la vida moderna, por un lado, y, por otra parte, una más amplia visión de la ciencia en su conjunto, requieren que se estrechen y se pongan en más evidencia los lazos que unen la matemática y las ciencias experimentales y de observación. Es necesario que el joven alumno, antes de abandonar el liceo, adquiera la persuasión de que entre las matemáticas y las otras ciencias existe un lazo íntimo y una afinidad muy grande, y que experiencia y razonamiento son ambas indispensables, aunque sea en diversa medida, para enriquecer cualquier campo del saber. Es necesario que sepa que unas y otras de esas ciencias siempre se han prestado recíproco auxilio, y que la renovación de las matemáticas en el siglo XVI está unida al florecimiento de las ciencias experimentales. Para este fin el enseñante elegirá las ocasiones que le ofrece el programa actual para hacer notar a los jóvenes cómo algunos conceptos fundamentales de las matemáticas modernas (especialmente el de función) han sido sugeridos por las ciencias de observación, y, precisados después por el matemático, ejercieron a su vez una benéfica influencia sobre el desarrollo de aquéllas.

Pero, al desarrollar el programa, debe el enseñante evitar dos peligros opuestos que harían ineficaz su obra: el peligro de caer en un grosero empirismo o el, no menos grave, de experimentar la influencia de un exagerado criticismo. El método empírico, escondiendo los lazos que unen los hechos sugeridos por la experiencia, y prescindiendo de las teorías que a ellos se refieren, quitaría a

la matemática el valor educativo de la mente y oscurecería el encanto que ella debe ejercitar sobre aquellos alumnos en los cuales prevalecen las facultades lógicas. Por otra parte una enseñanza en que penetraran las sutilezas de la crítica moderna sería accesible a pocos, y a estos mismos daría una idea unilateral, falsa por lo tanto, de lo que es la ciencia.

La justa medida y las cualidades en el desarrollo de estos programas es lo que principalmente debe recomendarse al enseñante: éste, mediante interrogaciones y oportunos ejercicios hechos en la escuela, o señalados para ejecutarlos en casa, deberá asegurarse continuamente de que lo siguen la mayoría de los alumnos, y tratará de que su enseñanza resulte adaptada a la inteligencia media de la clase.

Antes de pasar al examen de algunos puntos especiales del programa, es oportuno advertir que en su redacción se siguió el orden que ha parecido más conforme al desarrollo lógico. Pero, dentro del programa de cada clase, el profesor puede hacer trasposiciones, sobre todo con el fin de armonizar su propio curso con el de física. A este propósito se recuerda aquí cuánto ha sido dicho en las *Instrucciones generales* acerca de los acuerdos que deben realizar entre sí los profesores de materias científicas. Sin embargo, se advierte que no es en absoluto necesario que sistemáticamente el profesor de matemática prepare a su colega de física los conocimientos teóricos de los cuales éste necesita, pero tal vez convenga, siguiendo el proceso histórico, que una noción sea indicada por el profesor de física, precediendo al de matemática, salvo que éste en seguida la precise y desarrolle.

En las instrucciones que siguen se insiste sobre los puntos que ofrecen alguna novedad, y se pasa ligeramente sobre aquellos que figuraron en el antiguo programa liceal.

CLASE II

1. Al recordar a los alumnos como las longitudes y los ángulos se miden con el metro y con el goniómetro, el profesor tendrá cuidado de advertir que toda medida concreta, está necesariamente afectada de un error que puede ser reducido, perfeccionando los medios de medida, pero que nunca puede ser eliminado. Agregará que en las ciencias aplicadas que más han evolucionado (geodesia, astronomía) se establece previamente un límite del error tolerable y, cuando tal condición se satisface, la medida es considerada prácticamente exacta. Con ese fin podrá establecer una comparación entre la resolución teórica y la prácticamente exacta de algunos problemas geométricos de los más sencillos.

Las medidas aproximadas conducirán naturalmente a considerar las operaciones sobre los números decimales que representaran valores aproximados, pero el profesor se limitará a razonar sobre pocos ejemplos numéricos oportunamente elegidos.

La comparación entre las medidas aproximadas y las medidas exactas de las magnitudes hace surgir la idea de la existencia o no de una común medida, de donde el concepto de magnitudes incomensurables. A ésta se relaciona los números irracionales, sobre los cuales el profesor dirá lo que sea estrictamente necesario para fijar bien el concepto, limitándose a poquísimas nociones en cuanto se refiere a las operaciones con esos números.

Se entiende que la vía aquí indicada para la introducción de los números irracionales no es obligatoria, y si el profesor cree que debe seguir otra, tiene completa libertad para ello.

2. En el capítulo sobre las coordenadas cartesianas en el plano, el profesor no debe proponerse desarrollar una primera parte de la geometría analítica, sino tener muy presente el fin de servirse de aquellas para la represen-

tación gráfica de las funciones. De inmediato harán uso los alumnos de papel cuadriculado y sobre él deberán habituarse a señalar los puntos y las curvas que el profesor indicará. Conviene introducir las nociones de función, volviendo a considerar los fenómenos descritos en los cursos de Física, Química, Biología y Geografía económica que a ello se presten. Se hará la distinción entre funciones, definidas por un grupo discreto de valores de la variable (los diagramas de los cuales tienen una forma en parte arbitraria y también podrían ser representados por líneas quebradas) y funciones definidas para todos los valores comprendidos entre ciertos límites (los diagramas de esas funciones serían trazados por instrumentos registradores), del examen de la curva representativa se deducirán los intervalos en los que la función sea creciente o decreciente, los puntos en que alcanza un máximo o mínimo, etc. Después se introducirán las funciones definidas por determinadas operaciones a ejecutarse sobre la variable y se estudiarán las representaciones gráficas de las funciones enteras de los primeros grados y de la función inversa de la variable, poniendo de manifiesto sus interpretaciones físicas y mecánicas (movimiento uniforme o uniformemente variado, ley de Boyle-Mariotte, etc.

A este respecto el profesor podrá también citar el ejemplo concreto de los horarios gráficos, sistemáticamente adoptados por los ingenieros ferrocarrileros, y desde hace algún tiempo empleados en el comercio por el público.

Otros ejercicios oportunos, sobre este capítulo, serán suministrados por la resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, o de una ecuación cuadrática con una incógnita.

3.º Las nociones sobre las coordenadas cartesianas en el espacio serán dadas con el fin de hacer comprender a los jóvenes las representaciones cristalográficas, y deberán restringirse a lo estrictamente necesario.

CLASE III

1. El profesor, volviendo a considerar el concepto de función, inherente a una determinada curva, introducirá como ejemplos importantes las funciones circulares (seno, coseno, tangente y cotangente), cuyas propiedades se estudiarán de la manera corriente, pero con el auxilio de las curvas representativas. Será conveniente que los alumnos aprendan a construir en el papel cuadriculado las curvas de los senos y de las tangentes, y a determinar gráficamente, con una exactitud relativa, los valores de las funciones circulares de arcos expresados por un número entero de grados.

2. Al introducir el concepto de límite de una sucesión de números y de una cantidad variable, el profesor tendrá cuidado de hacer notar que en la teoría de las irracionales y en la definición de perímetro o área de un círculo, interviene implícitamente aquel concepto. Con otros ejemplos tomados de la geometría y del álgebra convendrá aclarar la definición de límite, sobre la cual es oportuno repetir que no es éste el sitio para sutilizar. De las operaciones sobre los límites el profesor podrá, a lo más, dar simples nociones, evitando toda demostración. Para aquellos pocos límites que deberán determinarse en el curso del programa, se indicarán las propiedades de las operaciones en cada caso particular. Las aplicaciones del concepto de límite a la longitud de una curva se expondrán brevemente, admitiendo la existencia del límite para las curvas que ordinariamente tienen que considerarse. La determinación de la tangente a una línea y la noción de velocidad del movimiento variado, sin esfuerzo conducirán al profesor a introducir la derivada de una función (será oportuno indicar esta derivada sin hacer uso de la notación diferencial). El cálculo de las derivadas de las funciones especiales recordadas más arriba, y la interpretación geométrica de tales derivadas, son inmediatas.

3. Establecidas las propiedades de las potencias de exponente racional, el profesor dará una breve noción del caso en que el exponente es irracional, pasando de inmediato a la noción de logaritmo. Con ejemplos numéricos bien escogidos deberá hacer que los alumnos adquieran práctica en el uso de los logaritmos, empleando tablas de cuatro decimales, a lo más de cinco. La curva logarítmica, a que se refiere el programa, se entenderá elegida de base 10; y se observará que, cambiando la base, las ordenadas (esto es, los logaritmos), varían todos en la misma relación.

4. De los varios casos de resolución de un triángulo rectilíneo el profesor se limitará a tratar aquellos en que son dados lados y ángulos. En las aplicaciones de la trigonometría, se elegirán aquellos problemas que realmente se presentan en la práctica, tratándolos en casos numéricos (distancia entre dos puntos inaccesibles, altura de una montaña, etc.). Convendrá que el profesor dé una idea a los alumnos de los procedimientos que se emplean para medir un arco de meridiano (con la triangulación), para valuar la distancia a la luna o a las estrellas, pero esto como simple fin de cultura, y sin entrar en ningún detalle del cálculo numérico.

5. El profesor indicará como se miden prácticamente las áreas de curvas cerradas trazadas en el papel milimetrado; hará valuar el área por exceso o por defecto, y hará notar cómo se obtienen valores cada vez más aproximados, achicando el lado del cuadrado fundamental; que las dos series de valores aproximados, por defecto y por exceso, convergen a un mismo límite, será admitido sin demostración.

Cuando, por lo contrario, se trate del área comprendida entre una curva, el eje de las abscisas y dos ordenadas, convendrá (en la hipótesis de que la curva sea cortada en un solo punto por cada paralela a las mismas ordenadas) obtener la descomposición del área mediante ordenadas intermedias, equidistantes entre ellas y de las dos

extremas, y considerar dicha área como comprendida entre dos sumas de rectángulos de bases iguales. Aquí es obvia la determinación de la diferencia entre dos valores aproximados del área, y de inmediato se verá que tal diferencia tiende hácia cero cuando aumenta indefinidamente el número de ordenadas intermedias.

Después de ésto, se daran brevemente algunas nociones de integral definido, deduciéndolo del precedente problema geométrico. No deberá entrarse en ningún otro detalle teórico, pero será útil hacer alguna inmediata aplicación, y en particular la (remonta a Galileo) relativa a la determinación del camino recorrido por un punto dado dotado de movimiento variado, en el cual se recurrirá al diagrama de velocidad.

IX

SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES

(Por el profesor G. Loria) (1)

. . . .

Las tradiciones geométricas de Italia son euclídeas; desde que se disiparon las tinieblas de la edad media, ediciones, traducciones, comentarios de los *Elementos de Euclides* empezaron a aparecer y se sucedieron sin cesar, con las firmas de personalidades tan eminentes como los de *Tartaglia*, *Commandino*, *Viviani*, *Barelli*, *Grandi*, *Sacheri*, *Fagnano*, *Flanti*. Esta brillante serie es una prueba del culto sin límites que, durante muchos siglos, tuvo Italia por el gran alejandrino. Sin embargo, cuando al fin llegó a ser libre, y pudo, de un extremo a otro, gozar de un gobierno nacional, conservaba todavía en su organización escolar trazas deplorables de su secular servitud. En el antiguo Piamonte, por ejemplo, ciertamente a causa de la

(1) Extracto de una comunicación presentada al 3.er Congreso internacional de las matemáticas, Heidelberg 1904.

influencia francesa, se prefería el método semi-aritmético de *Legendre* a los rigurosos procedimientos de *Euclides*, mientras que en las provincias que acababan de libertarse del yugo austriaco estaban difundidos manuales escritos únicamente con un fin comercial; era tan poco satisfactorios que *Cremona*, nombrado profesor de un gimnasio de la Lombardía, no quiso aceptar ninguno como texto, y saludó como señal de una mejora y punto de partida de nuevos progresos, la traducción de una obra, actualmente casi olvidada: me refiero al *Tratado de geometría* de Amiot. Encargado por su Gobierno de trazar las líneas generales de una reforma de la enseñanza geométrica en las escuelas clásicas italianas, *Cremona* no titubeó un solo instante en proponer como remedio el volver pura y simplemente a los *Elementos de Euclides.* Si esta medida, que el Gobierno se apresuró a adoptar, puede parecer un poco draconiana, cuando se tiene en cuenta el fin que ella se proponía (y que en efecto alcanzó), es decir, extirpar de nuestras escuelas los malos hábitos introducidos por ciertos libros, tal medida debe ser considerada como uno de los actos del gran matemático que le señalan al reconocimiento eterno de sus conciudadanos. Justo es agregar que en esa valiente empresa tuvo como aliados otros dos grandes sabios, *Brioschi* y *Betti*, cuya excelente edición de *Euclides* hizo no solamente posible, sino relativamente fácil, la reforma propuesta por *Cremona.*

El retorno a la fuente pura de la geometría griega, teniendo como resultado inmediato perjuicios materiales, provocó una viva oposición, pero que no podía durar mucho tiempo, y que felizmente acabó por cesar. Sin embargo, los grandes matemáticos que introdujeron los *Elementos de Euclides* en las escuelas italianas no negaban que este libro, después de veintidos siglos, no tuviera necesidad de retoques; así, el Gobierno italiano abrió un concurso para un tratado inédito de Geometría elemental y algo más tarde atenuó la disposición que hemos citado, limitándose a pedir que la enseñanza clásica fuera hecha

según el *método*, pero no según el *texto* mismo de *Euclides*. Es esta una disposición que merece ser elogiada; es ella, en efecto, que permitió la adopción en nuestras escuelas de buenos tratados, por ejemplo, los de *Sannia* y *d'Ovidio* y de *Faifofer*; en cierto modo, es ella la que invitó a los geométras a investigar si las teorías expuestas por el gran maestro se prestaban a mejoras didácticas y científicas, y dió impulso a investigaciones que condujeron a resultados de considerable importancia; tales son los que, con relación a la teoria de la equivalencia de los polígonos y de los poliedros, llegaron a corregir un defecto existente en los *Elementos* de Euclides, que *Legendre* mismo no llegó a suprimir.

Este régimen de libertad siempre creciente, tan conforme a la naturaleza del pueblo italiano, alentó a sabios de notoriedad, que actuaban fuera de las escuelas medias a interesarse por las cuestiones elementale de la geometría.

El primero de los geómetras, que entraron en esta vía, fué nuestro lamentado *De Paolis*, que, por medio de un texto excelente, completamente original, no solamente hizo popular en nuestras escuelas la idea de eliminar la antigua separación de la Geometría, en Geometría plana y en Geometría del espacio, sino que, por medio de numerosos ejemplos, demostró la utilidad teórica de esta innovación.

No menos radical fué la reforma que propuso más tarde *Veronese*, persiguiendo el curso de las ideas que caracterizar sus notables investigaciones de Geometría de varias dimensiones; limitémosnos a señalar sus esfuerzos coronados de éxito, para determinar el rol de la idea de *movimiento* en las demostraciones geométricas y la conclusión a que llegó, que es científicamente posible y útil, del punto de vista pedagógico, desterrar completamente ese concepto. La importancia de la acción de *Veronese* ha sido acrecida por numerosas discusiones que levantaron sus proposiciones.

Menos revolucionarios fueron los últimos de aquellos sabios italianos que se ocuparon de la Geometría elemental; en efecto, *Enriques* y *Asvaldi*, volviendo a la tradición euclídea, se propusieron, en un reciente libro, rehacer los *Elementos* de Euclides, exponiéndolos bajo una forma adaptada al estado actual de la ciencia y a las necesidades de nuestras escuelas. La cuestión de los postulados fundamentales de la Geometría y la teoría de la equivalencia atrajeron su atención de una manera completamente especial, con el fin de satisfacer a la vez las exigencias de la enseñanza y las de la ciencia actual.

De naturaleza muy diferente es en fin el ensayo de introducir la lógica matemática en la enseñanza elemental de la Geometría y también del Algebra; este ensayo debe ser citado, pues él se basa sobre un método que cuenta en Italia con numerosos y hábiles adherentes, pero aun aquellos que consideraron favorablemente el Cálculo lógico en sus aplicaciones al análisis microscópico de las ideas fundamentales de las matemáticas, no creen, en general, que esté destinado a suministrarnos la solución definitiva del problema de la enseñanza elemental.

Habiendo tenido la ocasión de citar trabajos didácticos referentes al cálculo, no me es permitido dejar de mencionar maestros tales como *Arzela*, *Capelli* y *Pincherle* cuyas obras, que tuvieron gran éxito, han franqueado su país de la necesidad de recurrir al extranjero para tener buenos textos de aritmética y de álgebra.

Los alumnos de los sabios que acabamos de nombrar, desde que ocuparon una cátedra en la enseñanza media, se propusieron, mediante honrosos esfuerzos, poner a prueba esos nuevos procedimientos didácticos; para ello consiguieron hacerlos más perfectos en los detalles y más adaptados a la inteligencia de los jóvenes.

De consiguiente, el antiguo tipo de nuestras escuelas

experimentó una modificación radical; pues, los jóvenes profesores, ensayando con un entusiasmo comunicativo los nuevos métodos, llevaron vida y luz a las tristes salas, en las que un viejo profesor, bostezando, exponía la antigua demostración del teorema de Pitágoras, en presencia de un somnoliento auditorio. El gran público, en general inclinado a desconfiar de las novedades, siguió con cierto temor este cambio, apoyado en ésto por los profesores del *antiguo régimen*, que consideraron ese movimiento del mismo modo que ciertos antiguos médicos juzgan los nuevos procedimientos curativos; pero, los que tienen fe en el progreso indefinido del saber no pueden dejar de saludar con alegría esos cambios que hace el método de enseñanza de la Geometría, sin dejar de seguir siempre el camino indestructible abierto por *Euclides.*

La Sociedad *Mathesis*, fundada hace algunos años con el fin de agrupar a los que enseñan las ciencias exactas en las escuelas medias, puso en evidencia de una manera brillante toda esa vida que anima a nuestros profesores de matemáticas; su noble programa ha sido resumido en excelentes términos por uno de sus presidentes diciendo que su fin es hacer que los *profesores de la ciencia resulten en ventaja de la escuela.* Llamando la atención de los sabios sobre temas determinados, dirigiendo las correspondientes discusiones; fijando reuniones parciales y congresos generales, *Mathesis* mantiene encendido ese fuego sagrado que nos parece necesario para que los profesores de las escuelas medias sean dignos de la alta misión que la Sociedad les ha confiado: si aquélla tiene el cuidado de mantener el continuo contacto de sus asociados con los miembros del cuerpo universitario, contribuirá a desarrollar cada vez más este cambio de ideas entre los profesores de todos los grados, que juzgamos indispensable, si se quiere asegurar esta continuidad en la ense-

ñanza de la misma rama del saber, que consideran necesaria todos aquellos que recuerdan que *natura abhorret a saltus*.

Entre las cuestiones que se han discutido en el seno de la *Mathesis*, hay dos que por su importancia merecen ser tratadas.

La primera ha sido promovida por la publicación del *Tratado* de Geometría de *De Paolis*, y consiste en la investigación de las ventajas que puede obtener la enseñanza si se elimina la antigua separación que *Euclides* estableció entre la Geometría del plano y la del espacio. Desde 1825 *Gergonne*, observaba «que razonablemente es per« mitido preguntarse si nuestra manera de dividir la Geo« metría en Geometría plana y Geometría del espacio, es « tan natural y tan exactamente conforme a la esencia de « las cosas, como veinte siglos de costumbre han podido « hacernos creer»; es la misma idea que, unos quince años después, sostuvo un oscuro geómetra francés, de *Mahistre*, del cual *Laisant* ha realizado recientemente la exhumación.

La 2.ª edición de la obra de de *Mahistre*, apareció en el mismo año (1844) en que fué publicado el *Lehrgebände der niedern Geometrie* de Carl Anton *Bretschneider*, en el cual la fusión entrevista por *Gergonne* se efectúa; pues en lugar de la antigua división de la geometría, se encuentra la de geometría de posición, geometría de la forma, geometría de la medida. Si no nos equivocamos, *Bretschneider* en Alemania, lo mismo que *Gergonne* en Francia, no encontró imitadores, aunque *Schlömitch* francamente haya proclamado que «la preeminencia de la «planimetría es un error, debiendo ser dado el tono por la «estereometría». En cuanto a Italia, es muy notable que en los programas oficiales para nuestros Institutos técnicos, publicados en Octubre 1871, se lean las siguientes líneas, que, sin duda, se deben a *Brioschi*: «Servirse del « espacio de tres dimensiones, aun en las cuestiones geo« métricas planas, es uno de los artificios de investigación

« geométrica, que también conocieron los antiguos, y que « contribuye a que los alumnos se acostumbren a ver por « los ojos del espíritu las figuras geométricas del espacio « ideal ». Y poco después *Cremona* agregaba en una obra célebre: « Las consideraciones estereométricas dan muy « a menudo el medio de hacer fácil e intuitivo lo que en « geometría plana sería complicado y de difícil demostra- « ción: por lo demás ellas aguzan la inteligencia y ayu- « dan al desarrollo de esa imaginación geométrica que es « una cualidad esencial del ingeniero para que pueda « concebir las figuras del espacio aun sin el auxilio de « un dibujo o de un modelo ». [1] Casi al mismo tiempo en que el gran profesor italiano escribía estas líneas, un eminente geómetra francés, *Meray*, inspirándose en las ideas de *Gergonne*, efectuaba la fusión de las dos geometrías por sus excelentes *Nuevos elementos*, publicados en París en 1873. Pero, parece que por entonces esas ideas no tuvieron ninguna aceptación entre sus compatriotas, ni en el extranjero; en todo caso, no fueron conocidas por *De Paolis* cuando concibió el plan de sus *Elementos de geometría* (Turin 1884). Es por la publicación de este libro (muy pronto seguido por un tratado análogo de *Lazzeri* y *Bassani*) que comenzaron en Italia las largas discusiones entre *fusionistas* y *separatistas;* y es digno de ser notado que el eco de esos debates, habiendo llegado hasta Dijón, por el órgano del que tiene el honor de dirigiros la palabra, *Meray* fué alentado a volver a sus antiguos métodos y perfeccionarlos: un brillante éxito, comprobado por documentos oficiales, ha coronado esos nuevos esfuerzos. Se ha tenido la complacencia de calificarme como un fusionista ardiente: es una exageración: amante, en general, de toda novedad, he considerado con gran simpatía la aparición de un nuevo método para considerar el conjunto de las verdades geométricas. Además, cuando un procedimiento ha sido imaginado por distin-

(1) Elementi di geometria projettiva (Turin, 1873) Prefacio.

guidos pensadores de nacionales y de épocas diferentes, y cuando, se ha mostrado capaz de muy vastas y muy variadas aplicaciones, me parece que no es el caso de relegarlo entre los productos artificiales destinados a perecer, aun en el caso de que sus resultados no autorizaran todavía a fallar la cuestión a su favor. Siendo así, es natural que exprese el voto de que la cuestión de la fusión de la planimetría y de la estereometría sea estudiada de un modo ámplio y completo, ensayando resolverla sirviéndose de consideraciones teóricas y de los resultados de las experiencias ya hechas y de las que se tiene el propósito de hacer.

Otra de las cuestiones tratadas en el seno de la Asociación *Mathesis* a las cuales hice alusión algo más arriba, es la investigación de los medios para aumentar el aprovechamiento de la enseñanza de los elementos de las matemáticas. Ahora, ¿esta enseñanza da en general resultados menores que las otras enseñanzas paralelas, científicas o literarias? No podría afirmarlo. Sin embargo, encuentro bella y digna de atención la cuestion que acabo de apuntar, pues el profesor debe esforzarse en aumentar la eficacia de su enseñanza, cualquiera que sea el grado que haya alcanzado. No puede esperarse obtener una solución definitiva y completa de la cuestión enunciada; las observaciones generales que siguen sólo están destinadas a aclararla un poco. Voy a empezar por una observación hecha por *Hermite*, casi en la víspera de su muerte; véase como se expresaba este gran profesor:

« *Bacon* de Verulamio ha dicho que la admiración es « el principio del saber; su pensamiento que es justo en « general, lo es sobre todo respecto de nuestra ciencia, y « en él fundo mi autoridad para expresar el deseo de « que se haga para los estudiantes, la parte más amplia « a las cosas simples y bellas que al extremo rigor ac-

« tualmente en boga, pero muy poco atrayente, con fre-
« cuencia hasta fatigante sin gran provecho para el prin-
« cipiante cuyo interés no puede comprender ».

Una idea completamente análoga a la de Bacon fué emitida por un filósofo italiano, *Bovio*, diciendo que « el fin de la enseñanza media es el de enseñar, no la ciencia, sino el amor de la ciencia ». Ahora, las matemáticas pueden considerarse bajo un doble aspecto, es decir, se las puede admirar como el modelo más perfecto de edificio científico, de una solidez tan completa que, aún el siglo de la crítica no ha podido conmover sus bases; o bien como que suministran medios de investigación tan seguros y potentes que todas las demás ciencias a ellas recurren tan pronto salen de su infancia. Ahora, si es una prerrogativa de algunos espíritus selectos amar desde su juventud las ciencias exactas por sus cualidades *teóricas*, ninguna persona inteligente puede permanecer indiferente en presencia de las bellas aplicaciones de que aquellas ciencias son susceptibles; por consiguiente no será nunca por demás recomendar a los profesores de matemáticas que traduzcan, en una forma concreta, las cuestiones teóricas y de que inserten en el curso de la exposición de las doctrinas, con la mayor frecuencia que puedan, aplicaciones prácticas, variadas e interesantes. Por otra parte, es una idea que he visto aplicada en un excelente tratado de geometría, publicado en Alemania: me refiero al de los profesores *Henrici* y *Treutlin*, en el cual, como aplicación de la trigonometría, se encuentran elementos de la triangulación del Gran Ducado de Baden.

El nombre de *Treutlein*, que acabo de mencionar me ofrece la ocasión de declarar que también me pongo a su lado cuando recomiendo la introducción de un elemento histórico en la exposición de las teorías matemáticas: « Las materias de la geometría, ha observado *Blas Pas-*
« *cal*, son tan serias en sí mismas, que hay conveniencia
« que se ofrezca alguna ocasión para hacerlas un poco
« más entretenidas »; ahora, es el elemento histórico que

suministra quizá el mejor medio para interrumpir la marcha algo pesada de las deducciones matemáticas.

Permitidme, señores, que agregue en fin una proposición concerniente particularmente a la Geometría En la enseñanza universitaria los cursos de Geometría descriptiva y de Geometría proyectiva son acompañados de dibujos, en los cuales los estudiantes efectúan las construcciones y aplican las teorías expuestas por el profesor; es un medio precioso que permite familiarizar a los alumnos con los métodos cuyas fuentes se encuentran en las obras inmortales de *Monge* y de *Poncelet*. ¿Por qué este sistema no podría extenderse a las escuelas medias? Dos horas de ejercicios gráficos cada semana bastarían a los alumnos para que asimilaran la esencia misma de los procedimientos propios de la Geometría, y por un comercio continuo con los círculos y los triángulos, aprenderían a amar lo que antes sólo temían: séame permitido fijar sobre esta idea la atención de los sábios que me hacen el honor de escucharme.

Como es muy natural, se ha hablado mucho en el seno de la *Asociación Mathesis*, de programas de enseñanza, ocupándose de las escuelas clásicas *(Gimnasios)* lo mismo que de las *Escuelas* y de los *Institutos técnicos (niedere und obere Realschulen)*. Es a propósito de estos últimos que la diferencia de las ideas se ha manifestado más vivamente no habiéndose llegado todavía a un acuerdo; es cosa que podía preverse, y que no es difícil de explicarse; pues la enseñanza técnica no tiene tipo fijo determinado en todos los países; en Italia hay personas que creen bueno forjarlo sobre el modelo de los *lateinlosen Schulen* de Alemania, o de la *enseñanza moderna* de Francia, mientras que otras sostienen la opinión de que es preciso darle un carácter francamente profesional, tal como lo tendría una escuela de artes y oficios. No sé si ha sido la causa o el efecto de esta diversidad de opiniones que hizo que nuestros institutos técnicos han efectuado un viaje de ida y vuelta del ministerio de Instruc-

ción al de Agricultura y Comercio; de todos modos me parece que esas escuelas están actualmente formadas por elementos heterogéneos que sordamente luchan entre sí y entre los cuales, tarde o temprano, se producirá la escisión definitiva. Como profesor universitario, particularmente me intereso por el programa de la Sección físico-matemática, pues es la única que conduce a las escuelas superiores. Este programa ha sufrido muchos cambios y creo que otros tendrá todavía que sufrir, pues el propio fin que se propone no está bien determinado; para las matemáticas debe elevarse por encima de las teorías completamente elementales, pero no debe alcanzar a las matemáticas superiores; debe comprender las *matemáticas complementarias*. ¿Cuáles son las teorías que debe comprender esta denominación? Nadie podría decirlo actualmente, ni podrá decirlo jamás. Por consiguiente, según mi parecer, sólo hay una manera de redactar el programa de matemáticas para las secciones físico-matemáticas de los Institutos técnicos: es hacer una lista bastante numerosa de temas entre los cuales el profesor pueda escoger según sus ideas y sus gustos personales, o bien según las tradiciones del establecimiento al cual pertenece, y según las aptitudes de los alumnos. Esta idea no es nueva en el fondo, pues constituye la médula del *Lehrplan* publicado hace tres años para las *Oberrealschulen* de Alemania; es una idea profunda y extremadamente liberal que hace honor a los sabios que la iniciaron y que es de desear que sea aplicada de una manera aun más general...

X

PROGRAMAS DE MATEMÁTICA PARA LAS CLASES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN LOS GIMNASIOS Y LICEOS CLÁSICOS. (1)

Gimnasio (1914)

CLASE I — Aritmética práctica desde la numeración hasta las fracciones exclusivamente — Nociones elementales intuitivas sobre el punto, la recta, el plano, los polígonos, el círculo, los poliedros más comunes, el cilindro, el cono y la esfera.

CLASE II — Fracciones ordinarias y decimales — Sistema métrico decimal — Números complejos — Medida de líneas, de ángulos, de superficie y de sólidos.

CLASE III — Regla para extraer la raíz cuadrada — Razones y proporciones — Nociones de dibujo geométrico y ejercicios relativos a las medidas.

CLASE IV — (2 horas semanales) — *Aritmética racional* — Principales propiedades relativas a las primeras cinco operaciones de los números enteros — Caracteres de divisibilidad por 2 o por 5, por 4 o por 25, por 3 o por 9 — Máximo común divisor — Números primos entre sí — Mínimo común múltiplo.

Geometría — Rectas y planos Segmentos y ángulos — Rectas perpendiculares — Triángulos: sus propiedades y casos de igualdad — Polígonos — Rectas paralelas — Suma de los ángulos internos de un triángulo y de un polígono convexo — Paralelogramo y trapecios.

CLASE V — (2 horas semanales) — *Aritmética racional* — Fracciones y sus propiedades — Las principales propiedades relativas a las primeras cinco operaciones de las fracciones — Resumen de las propiedades de las operacio-

(1) Debe recordarse que los cinco años del Gimnasio constituyen el primer ciclo de la enseñanza secundaria, y los tres del Liceo el segundo ciclo.

nes con números racionales absolutos — Números decimales — Transformación exacta o aproximada de una fracción ordinaria en número decimal — Proporciones numéricas.

Geometría — Lugares geométricos — Circunferencia y sus propiedades — Posiciones relativas de una recta y de una circunferencia — Propiedades de los arcos, de las cuerdas y de los ángulos centrales — Angulos en la circunferencia — Tangentes desde un punto exterior — Posiciones relativas de dos círculos — Circunferencia inscrita o circunscrita a un triángulo — Problema gráficos elementales relativos a los segmentos, a los ángulos y a los triángulos — Problemas y lugares geométricos relativos a la circunferencia — Polígonos regulares — Cuadrángulo, exágono y triángulo regulares inscritos en una circunferencia.

LICEO

Clase I — (4 horas semanales) — *Álgebra* — Teoría de los números racionales con el signo y correspondientes operaciones — Cálculo literal — Ecuaciones en general — Ecuaciones de primer grado con una incógnita — Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas — Breves nociones sobre los sistemas de primer grado con tres o más incógnitas — Problemas de primer grado — Progresiones aritméticas y geométricas.

Geometría — Principales teoremas y problemas sobre la equivalencia de los polígonos — Proporciones entre magnitudes geométricas y sus más simples propiedades — Triángulos y polígonos semejantes y aplicaciones relativas — Decágono y pentágono regulares inscritos en una circunferencia.

Rectas y planos en el espacio — Angulos diedros — Rectas y planos perpendiculares — Rectas y planos paralelos — Proyecciones, ángulos y distancias — Triedros y sus casos de igualdad — Anguloides — Prismas y pirámides — Poliedros en general — Nociones sobre los poliedros regulares.

Clase II — (3 horas semanales) — *Álgebra* — Números reales y nociones sobre las operaciones correspondientes — Radicales y operaciones con ellos — Ecuaciones de segundo grado con una incógnita — Suma y producto de las raíces — Ecuaciones bicuadradas — Sistemas de ecuaciones de grado superior al primero en los casos más simples — Ecuaciones fraccionarias e irracionales.

Geometría — Magnitudes conmensurables e inconmensurables — Teoría de la medida y sus aplicaciones a los segmentos, a los ángulos, a los polígonos y a la circunferencia.

Principales teoremas y problemas sobre la equivalencia y la semejanza de los poliedros — Superficies y volúmenes de los prismas y de las pirámides — Cilindro, cono y esfera — Areas y volúmenes de los mismos — Aplicaciones del álgebra a la geometría.

Clase III — (2 horas semanales) — *Aritmética* — Teoría de los números primos y sus más simples aplicaciones.

Álgebra — Potencias con exponente racional — Potencias con exponente real — Ecuación exponencial — Logaritmos — Uso de las tablas.

Trigonometría — Funciones circulares y sus principales propiedades — Fórmulas para la adición, sustracción, duplicación y bisección de los arcos — Logaritmos de las funciones circulares — Resolución de los triángulos rectilíneos y aplicaciones.

INSTRUCCIONES VIGENTES PARA LAS CLASES 1.ª, 2.ª Y 3.ª DEL GIMNASIO

La enseñanza de la aritmética práctica y de la geometría intuitiva en las primeras tres clases gimnasiales tiene como fin ampliar y hacer cada vez más familiares a los jóvenes aquellos conocimientos prácticos ya adquiridos en las escuelas elementales, que todos puedan necesitar en las comunes contingencias de la vida, y preparar bien para la enseñanza racional de las matemáticas elementales, que empieza en la cuarta clase gimnasial.

En la aritmética, por medio de numerosos ejemplos, ejercicios y problemas elementales, el profesor deberá tratar de que los jóvenes adquieran la práctica necesaria en todas las partes de aquélla, debiendo escoger bien los problemas y ejercicios, tomándolos de preferencia de los casos más comunes, y de lo que los alumnos ven y conocen de la naturaleza, de modo que lleguen a reconocer la utilidad de lo que se les enseña, y se despierte en ellos tal interés que también por sí mismos se propongan pequeños y fáciles problemas.

En la geometría la nomenclatura y la noción de las figuras, deben darse principalmente por medio de sus imágenes, trazadas en el pizarrón, con sus modelos, y los jóvenes deben ser ejercitados, desde el primer año, en dibujar con instrumentos y a pulso, pero cuidando de la limpieza del trazado y de la exactitud de la forma. Para tal fin serán muy útiles también los rudimentos del dibujo geométrico enseñados en la tercera clase, los cuales se referirán a los más simples problemas de geometría, que después deberán ser tratados en el Gimnasio superior.

LA APLICACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA POR EL PROFESOR RODOLFO BETTAZZI

Relaciones entre la matemática y la realidad — 1. La matemática es una ciencia exacta, y, por consiguiente, consiste en deducciones obtenidas por procedimientos de lógica; pero algunos de los objetos sobre los cuales opera y los principios fundamentales de que ella parte, no pueden, necesariamente, ser obtenidos así.

Son tomados directamente de la realidad, de modo que se obtenga una ciencia que difiera de una ciencia experimental por la manera de sacar las conclusiones, pero que, con sus conclusiones, sirva para obtener resultados que se reflejen en la realidad. Si tal no es el fin actual de todo matemático en sus investigaciones, es esa por lo

menos la idea general que dió origen a las ciencias matemáticas, y que las alimentó en el curso de los siglos.

2. No es que digamos que la matemática estudia los objetos y los fenómenos tales como son en realidad. Toma de ellos las propiedades que se refieren a la cantidad, a la forma, a la extensión, al movimiento y las idealiza, es decir que, haciendo abstracción de las demás, las separa y las aisla (aunque en realidad ellas jamás sean separadas), y las modifica algunas veces para obtener resultados más útiles; por ejemplo, se consideran los cuerpos geométricos como continuos, mientras que existe realmente espacio entre una molécula y otra; nos los figuramos penetrables, y, en realidad, ellos son impenetrables.

En la matemática, se hace, pues, una construcción abstracta de los objetos; sin esto no podría ser una ciencia exacta, puesto que la concepción y la definición exacta de lo que son los objetos de la realidad nos faltan.

El matemático, en sus estudios, se desentiende de cualquier preocupación exterior y deduce, demuestra, con el único fin de descubrir verdades que le satisfagan, por la única razón de que ellas son verdades, y así se encierra completamente en una abstracción, que es la característica y, al mismo tiempo, la salvaguardia de la matemática. Pero, al lado de ésto, no es menos verdad que las definiciones y los principios fundamentales se modelan sobre lo que sucede en la realidad. Si en ese momento esto no es una cosa evidente, es porque su estudio actual ocurre en un período en el cual se ha recurrido a la realidad; se ha reconocido cuales eran los principios que debían admitirse para explicar los hechos que se quería estudiar, y se han obtenido leyes que en seguida se proponen como fundamentales en matemática, como si ellas hubieran sido encontradas a primera vista, pero en las cuales, ciertamente, no se hubiera pensado, sin la observación de los hechos que ocurren a nuestro rededor.

3. El profesor Klein, en su conferencia — *sobre el procedimiento aritmético en la matemática* — observa que « las

« matemáticas no son en absoluto agotables por la dedu-
« ción lógica, pero que junto a ellas la intuición con-
« serva, todavía ahora, su entera y plena eficacia, y que
« una exposición abstracta de deduciones lógicas no puede
« bastarnos, en tanto que no se haya formulado la fuerza
« en cada forma de intuíción y que no se conozca por
« las múltiples relaciones que, según el campo de obser-
« vación que se escoja, el esquema lógico tiene con los
« otros puntos de nuestros conocimientos.» El profesor Hoüel [1] dice « que la construcción de tal ciencia (exacta) « se compone esencialmente de dos partes distintas: una, « fundada sobre la observación y la experiencia, que con- « siste en reunir hechos y deducir de ellos por induc- « ción las leyes y los principios que servirán de base a « la ciencia; la otra que no es más que una rama de la « lógica general, se ocupa de combinar esos principios « fundamentales, de modo que se deduzca la representa- « ción de los hechos observados y que prevea además « hechos nuevos».

A esos dos elementos, podemos agregar un tercero, distinguiendo, como lo hace Laisant *(La mathematique)*, en tres períodos la tarea de los matemáticos en todas las cuestiones: es decir el pasaje de lo concreto a lo abstracto, la solución matemática de la cuestión, y en fin el retorno de lo abstracto a lo concreto, o sea la aplicación de los resultados obtenidos a la realidad.

Las relaciones de la matemática con el mundo que nos rodea no son, pues, accidentales y artificiales; y si se olvidaran esas relaciones, se haría perder a esa ciencia su carácter.

4. Sobre el tercer elemento de que acabamos de hablar, y que es el retorno a lo concreto, hay que hacer una observación, indispensable para el tema que vamos a tratar. En ese « retorno » no pueden encontrarse resul-

(1) *Houel — Ensayo crítico sobre los principios fundamentales de la geometría elemental.*

tados que se combinen exactamente con los que se pueden medir directamente; no se tendrá siempre una diferencia, y, por lo tanto, el resultado teórico sólo aproximadamente representará el resultado práctico. Se reconocerá la verdad de este hecho considerando que los objetos de la realidad no son, como ya lo hemos dicho, los de la teoría; y que, además, las medidas tomadas en la realidad, están lejos de ser exactas, sea a causa de la imperfección (inevitable como en todas las cosas humanas) de nuestros sentidos y de nuestros medios de medición, sea porque las medidas teóricas son diferentes de las medidas prácticas, aplicadas como ellas lo son a objetos que difieren (¿puede decirse en qué grado?) de las de la realidad.

En el retorno de lo abstracto a lo concreto, existe, pues, un error que, según lo que hemos dicho, no es exactamente calculable, pero del cual hay que conocer un límite superior si no se quiere que los resultados estén privados de toda significación. Este error se vuelve a encontrar siempre, aún en el caso en que hay mayor semejanza entre los objetos teóricos y los reales. Se hace tanto más pequeño cuanto esa semejanza resulta mayor, pero jamás puede desaparecer completamente; de modo que, en su forma figurativa, la frase de d'Alambert « *las verdades geométricas son la asíntota de las verdades físicas* », es profundamente verdadera.

El ejercicio como medio de estudio y de enseñanza — 5. El empleo de la intuición y del ejercicio es necesario algunas veces, y siempre es útil en la enseñanza. El profesor Klein observa, con razón, que en las lecciones elementales y en las que son destinadas a alumnos que tendrán que hacer mucho empleo de la intuición, como los naturalistas y los ingenieros, el punto de partida debe ser la intuición, por medio de la cual, como a su vez lo decía Poincaré [1], « *el mundo matemático permanece en contacto con el mundo real; y aún cuando las matemáticas puras podrían pasarse de él, siempre sería necesario recurrir a él para llenar el abismo que separa el símbolo de la realidad.*

El práctico siempre lo necesitará y, para un geómetra puro, debe haber cien prácticos». Pero, aún dejando esto de lado, parece indispensable conducir a los alumnos a la realidad, de la cual, en sustancia, nacen los objetos de la ciencia y de sus operaciones, aún cuando la ciencia los idealice; así, por una parte, los alumnos no perderán de vista el origen de la matemática, y por la otra, apreciarán el fin que ella se propone, y se acostumbrarán a utilizar en la vida tan precioso instrumento, y a apreciar como se debe los resultados, es decir, teniendo en cuenta la aproximación: y esto valdrá más que hacer más tarde y por separado esta aplicación, dándole quizá una falsa interpretación de exactitud.

6. Es necesario observar que si se recurre a la realidad, sea para establecer los principios de la matemática, sea para enseñar sus aplicaciones, no queremos que esa realidad vaya a suplir la demostración y el razonamiento. Que se deduzca de la observación de lo que nos rodea, los objetos de la matemática y, de entre sus propiedades las que, según los grados de la enseñanza, son oportunas; pero el razonamiento riguroso sólo deberá servir para descubrir las otras propiedades, sin hacer concesión ni ninguna mezcla con la práctica. A lo más, se podrá, en caso de que se crea necesario (a causa de falta de tiempo o de excesivas dificultades) no dar más que los enunciados de algunos teoremas, saltando la demostración, y suministrar ejemplos prácticos para *ilustrarlos*, de modo que no se les considere como demostrados, pero que pueda comprenderse su alcance, lo que difícilmente ocurre dando solamente el enunciado. Los ejemplos y los ejercicios serán preciosos, cuando se hayan demostrado los teoremas, para mejor hacer resaltar su importancia y su fin; procurarán la satisfacción de reconocer que esas propiedades se verifican en la práctica, o se aplican a investigaciones útiles, siempre teniendo en cuenta esa aproximación que hemos dicho que es inevitable.

7. Además, puede observarse que la intuición y la

práctica pueden servir algunas veces para proceder al razonamiento y allanarle la vía. Klein cree que «*la intuición matemática, desde la impresión de carácter métrico con la cual el ingeniero juzga de la distribución de las fuerzas en una construcción cualquiera hecha por él, hasta ese sentido indeterminado de convergencia que el hábil calculador siente en presencia de un procedimiento indefinido de cálculo, siempre precede en su esfera a la deducción lógica y que a cada instante ésta comprende un campo más vasto que aquélla. . .* ».

«*En el desarrollo de las diversas ramas de la ciencia matemática, la intuición ha dado los primeros pasos y ha precedido al estudio lógico y riguroso*».

Es, pues, útil en la enseñanza de esa ciencia, cultivar con cuidado esa parte práctica que, aplicada con discernimiento, conduce a veces al descubrimiento de algunas verdades.

Por ejemplo, si se dibujan dos segmentos equivalentes, y se unen sus extremidades por dos rectas que no se cruzan, se llamará la atención de los alumnos sobre esos dos segmentos de la figura, y de inmediato nacerá en el espíritu de los alumnos, al principio una vaga sospecha, después poco a poco la certeza de que esos segmentos son iguales, será entonces el momento de intervenir y de anunciar que la propiedad es absolutamente verdadera, y se podrá demostrar, o ensayar de hacerla demostrar por los alumnos. Se procederá de la misma manera en todos los casos semejantes, lo que servirá para desarrollar la inteligencia de los alumnos y para perfeccionar su intuición geométrica.

8. La aplicación nos obliga a salir del campo de la pura y simple abstracción, pero en cambio puede conducirnos al dominio de otras ciencias. En la enseñanza, este trabajo es útil, pues nos muestra los lazos y el acuerdo que existe entre las diversas ramas de los estudios: obliga, además, a los alumnos a aprender y a imprimir en su inteligencia ciertas partes fundamentales de

las demás ciencias, mientras que éstas, por la aplicación de la matemática, reciben, a sus ojos, una especie de sanción, a causa de la seguridad que el empleo de una ciencia exacta da a su resultados. De esta manera, la mecánica, la física, la cristalografía, la topografía, reciben poderosos socorros de la enseñanza matemática, y lo darán a su vez: y los alumnos obteniendo una real ventaja, encontrarán, sin duda, un agradable y útil recreo.

9. Las aplicaciones constituyen el mejor y más útil medio para vencer la repugnancia tradicional que se experimenta por las matemáticas, y aún algunas veces para despertar por esas ciencias el gusto en aquellos que, sin saberlo todavía, se sienten naturalmente inclinados a su estudio. Escogiendo bien las aplicaciones, se despierta la curiosidad de los jóvenes, se excita su interés; y puede ocurrir que el alumno sea así conducido a estudiar a fondo una cuestión que no había esbozado hasta entonces, y quizá (como ocurre algunas veces) se revele en él una fuerte pasión por la ciencia. Si se tratan las cuestiones sin hacer ninguna aplicación práctica, la enseñanza resulta árida y difícil, los alumnos se desalientan y empiezan a preguntarse si no pierden su tiempo en el estudio de una ciencia sin utilidad práctica y sin atractivos; mientras que si de inmediato se muestra con las aplicaciones bien elegidas, la utilidad y la importancia de los casos que se ha estudiado, se conduce al alumno en el mundo en que vive habitualmente, y se le libera de esa especie de opresión que le produce el estudio, de una ciencia completamente abstracta.

« Cuando lleguéis a las raíces cuadradas, dice el P. « Poulain, sabed utilizarlas aplicándolas al cálculo de « *medias proporcionales* y al *cuadrado de la hipotenusa.* Que « después de haber empleado mucho tiempo en aprender « la extracción de las raíces, no tengan los alumnos que « preguntarse: *¿para qué sirve ésto?* Cesad de contestarle « magestuosamente: *lo sabréis más tarde.* Si, muy tarde.

« Mostradles en seguida que con frecuencia un ingeniero « necesita extraer raíces para los problemas que acabo « de indicar ».

Medios de servirse de las aplicaciones en la enseñanza.

10. Examinemos ahora de qué manera la geometría puede prestar servicios en la enseñanza.

Los problemas de Aritmética son de gran utilidad; si los temas son tomados de una ciencia aplicada, y si los datos de los problemas están bien elegidos, podrán interesar mucho a los alumnos, y satisfacer o excitar su curiosidad. Resultarán todavía más útiles y más sistemáticos esos problemas, si los alumnos mismos deben buscar los datos, porque, independientemente del placer que encuentran en las investigaciones en cuestión, en las mediciones, las experiencias, las lecturas de instrumentos, etc., existe además una gran ventaja; es que no verán en eso nada de arbitrario, sino un ejemplo efectivo de lo que realmente se presenta en la naturaleza.

11. El dibujo es también un gran medio de enseñanza geométrica, pues permite realizar, sino las figuras que son abstractas, por lo menos ciertos objetos reales, de los cuales esas figuras son la imagen. El dibujo familiariza a los alumnos con el uso de las palabras y la construcción de las figuras geométricas, les ofrece ocasión de aprender nuevas definiciones, y los acostumbra a concebir con precisión y claridad las figuras geométricas que más tarde estudiaran con mayor facilidad. Para que el dibujo dé buenos resultados, deberá ser hecho con el mayor cuidado y precisión posible. Ciertamente, que el fin no es que las figuras dibujadas tengan mayor semejanza con las verdaderas figuras geométricas, pues, entre una figura abstracta y una figura concreta, no puede existir verdadera semejanza, y las figuras concretas «son siempre falsas», como muy bien lo observa Laisant; pero, según el mismo autor, « cuando la aproximación es « demasiado grosera, y cuando los trazados están mal eje« cutados y son confusos, esta confusión material pronto

« engendra la del razonamiento y contribuye a impedir « la aparición de la verdad ».

12. No hay que temer que el dibujo, haciendo parecer evidentes cosas que deben ser demostradas, sirva para quitar importancia a los razonamientos. En toda enseñanza, en efecto, hay que establecer con precisión los principios fundamentales y primitivos, que pueden o no ser demostrados. Serán más o menos numerosos según las exigencias de la escuela y la naturaleza de la enseñanza; pero, una vez establecidos esos principios, toda verdad que se enuncia debe ser, o uno de esos principios o una consecuencia lógica que se deduce de ellos mismos y de las otras verdades que ya hayan sido demostradas. De ésto resulta, que, si se reflexiona, si se desecha toda aserción que no sea de tal naturaleza, se eliminarán así aquellas que tenderíamos a emitir con ese simple testimonio de la observación y de los sentidos, y, por consiguiente, también aquellas que fueran sugeridas por el dibujo. Por lo tanto, el peligro señalado más arriba no existe, a lo menos (y sea dicho ésto para todo lo que ha sido escrito, o que escribiré en el curso de este artículo) si el profesor es sabio y de conciencia.

13. No hay que temer tampoco que el dibujo pueda circunscribir la fantasía geométrica, haciendo demasiado limitadas o demasiado pobres las imágenes de las figuras que crea, restrigiéndolas casi a sólo representar la figura especial que se traza en cada dibujo.

Cuando una figura, un triángulo por ejemplo, haya sido definido, el alumno que lo dibuja pensará en esa definición, y sólo fijará su atención sobre lo que ella contiene; por consiguiente él mismo verá en el dibujo que representa el verdadero triángulo, pero que no lo es. Explicaciones especiales por el profesor, y los diversos cambios de formas del triángulo en nuevos dibujos bastarán para persuadir al alumno que el triángulo es la imágen abstracta que comprende las infinitas variedades de las figuras correspondientes que se podría trazar.

14. En ciertas cuestiones de geometría sólida, el dibujo es indispensable para comprender bien las relaciones recíprocas de las líneas y de las superficies, que sin eso, los jóvenes alumnos difícilmente comprenderían; desde luego, sería útil, como lo hace notar Lacroix [1] ejercitar a los alumnos en el dibujo tomado de la realidad utilizando modelos de cuerpos geométricos, con todos los detalles de sombras, y de relieves que de ordinario se reservan para el dibujo de ornato y de figura.

15. El uso del dibujo es también muy recomendable en el estudio de la geometría analítica, principalmente plana; pues, en lo que concierne a la del espacio, el dibujo ofrece dificultades considerables debidas a la imperfección o a la complicación de los medios representativos.

El dibujo puede servir, sino para descubrir las propiedades de las curvas, por lo menos para dirigir y localizar las investigaciones destinadas a encontrar esas propiedades; además, el dibujo, acompañando esas investigaciones las ilustra, las precisa, y da una idea exacta del valor real de los resultados obtenidos.

Es útil que los alumnos hagan muchos ejercicios de dibujo de curvas, y que en cada uno de ellos tracen el mayor número posible de elementos relativos a la curva. Si la falta de tiempo (que es ahora el tirano de nuestras escuelas) no permite dibujar con los instrumentos, que se dibuje a pulso sobre papel cuadriculado; particularmente en las coordenadas cartesianas, esto permite obtener resultados rápidos y suficientemente aproximados.

16. El trabajo manual será también un socorro agradable y útil. Para la Geometría del espacio todos saben que los modelos de sólidos de madera o de alambre son muy preciosos, como también las superficies hechas con hilos, etc. Los poliedros mismos, desarrollados sobre el papel, son útiles auxiliares, principalmente si se hacen confeccionar por los alumnos dándole las reglas necesarias y oportunas.

(1) Lacroix -- *Ensayo sobre la enseñanza.*

Es también muy útil y entretenido para los alumnos hacerles dibujar curvas planas sobre pequeñas placas de madera que sirven para recortarlas con pequeñas sierras; se les hará en seguida ejecutar el recorte de esos dibujos, y así los alumnos verán y comprenderán las propiedades de las curvas relativamente a su desarrollo las unas sobre las otras, a su engranaje para la transformación de los movimientos, lo mismo que muchas otras propiedades mecánicas. Así podrá hacérseles construír pequeños instrumentos para el trazado de ciertas curvas, por ejemplo, cicloides, epicicloides, etc.

17. Independientemente de esos ejercicios prácticos que los alumnos hacen individualmente en la escuela o en su casa, hay otros no menos importantes que pueden hacerse colectivamente y sobre el terreno, como las operaciones más elementales de la medida de las alturas, de distancias, de las áreas, de los volúmenes y de los modelos de relieve; sólo exigen el auxilio de algunos instrumentos muy simples y las primeras nociones de las matemáticas. Esos ejercicios a consecuencia del medio mismo donde son ejecutados y de la aplicación a la vida como lo son, ofrecen gran interés; además, son para los jóvenes un entretenimiento, sin contar que en el terreno, en pleno campo, los alumnos comprenden con más facilidad, y aprecian mejor ciertas verdades con las cuales no habían podido familiarizarse en la escuela.

18. Creo deber hacer notar que lo que llevo dicho y que se relaciona con el empleo de la práctica en la enseñanza, no es solamente mi opinión personal, o la de los autores que he citado. Algunos de mis colegas, profesores de algunos liceos, conducen sus alumnos al campo, y después de buenas explicaciones sobre el empleo de los instrumentos, les hacen medir la distancia entre puntos inaccesibles, la altura de torres por medio de la sombra, etc. El profesor Peano, de la Universidad de Turín, mi colega en la Academia Militar, hace dibujar a sus alumnos en ambas escuelas, curvas que les da o por sus

ecuaciones o por sus definiciones geométricas o mecánicas y, después de haber hecho calcular sus principales elementos, les hace dibujar un todo o una parte, hasta que dificultades demasiado grandes del dibujo vengan a oponerse. Y la experiencia demuestra que de esta manera las ideas son más claras, más precisas, y se fijan en la inteligencia mucho mejor que con largas explicaciones en el pizarrón.

La práctica en la enseñanza primaria de las matemáticas — 19. Todos conocen la importancia de la práctica y de la intuición al principio de la enseñanza de las matemáticas; es por allí que debe empezarse a fin de dar a los niños una idea de los números y de las figuras geométricas. No debe creerse, sin embargo, que la enseñanza de las matemáticas en las clases elementales debe ser una cosa puramente material, pues al contrario, será bueno preparar a los niños, y esto gradualmente, sin ningún aparato de definiciones o de explicaciones, a esas abstracciones que son la base de las matemáticas; pero, cuando los niños comprenderán bien que los números y las figuras son cosas puramente ideales, habrá que llamarlos a la realidad por medio de ejercicios y de aplicaciones. Un profesor inteligente, por el pasaje de la teoría o la práctica, tendrá ocasión de hacer notar que la teoría obra sobre otras cosas abstractas y que la resolución de los problemas es sólo la aplicación de operaciones abstractas a cuestiones concretas; así evitará frecuentes errores de los niños, haciéndoles observar, por ejemplo, que no se multiplican o dividen metros por obreros o kilogramos por días, sino que sólo se opera sobre números que representan esas magnitudes.

La práctica no debe suplantar, sino solamente corroborar y ayudar la abstracción; pero, por otra parte, descuidarla y reducir la enseñanza elemental a una simple enumeración de números, a simple cálculos numéricos, sería desnaturalizarla y hacerla árida, con la certeza de ser mal comprendida, y de ver a los alumnos digustarse de la matemática.

20. El dibujo deberá ser utilizado aún en las escuelas elementales como medio de enseñanza para dar a los niños ideas de forma, de extensión y de figura. Será conveniente; a lo menos en las clases secundarias inferiores, ejercitar a los alumnos por sí mismos en el dibujo geométrico que es una escuela preciosa de orden y de precisión, y un medio poderoso para preparar la inteligencia a la comprensión de lo que más tarde serán, en una enseñanza más avanzada, teoremas, y quizá a encontrar algunos.

Naturalmente se hará dibujar figuras y construcciones escogidas entre las más simples; pero su ejecución será sin duda fecunda de felices resultados, a condición, sin embargo, de que se habitúe a los niños a dibujar con exactitud.

21. En las escuelas inferiores será también conveniente familiarizar a los alumnos con la medida *directa* de los objetos, proponiendo problemas que se relacionen en lo posible con las cosas que generalmente están al alcance del alumno. Esas aplicaciones tienen además la ventaja de ejercitar la vista y la mano de los niños a fin de que pronto puedan valuar aproximadamente, y sin instrumentos, las longitudes, los pesos, las capacidades, etc.

La medición puede también ser empleada haciendo ejecutar dibujos a una escala determinada y según ciertos datos suministrados por el profesor. Esto dará a los niños la idea de proporción, de relación; y la misma figura ejecutada, muchas veces a escalas diferentes, hará nacer en ellos la idea de figuras semejantes.

La práctica en la enseñanza secundaria y superior de las matemáticas — 22. En cuanto a la enseñanza secundaria (y lo que según, sea también dicho para las diversas materias de la enseñanza superior) es cierto que su base debe ser el razonamiento lógico y riguroso. El empleo de la práctica debe ser solamente subsidiario; pero será útil, para la mayor claridad de los estudios, para excitar el interés, y recrear a los alumnos. Se harán frecuentes aplicaciones a medida que la ocasión se presente.

En lo que se refiere al álgebra, hay que tratar de despertar en los alumnos el gusto de otras ciencias, eligiendo problemas en la Física, la Astronomía, etc... A fin de que las cuestiones exciten la curiosidad, se las podrá elegir entre las que generalmente se creen difíciles o insolubles: se despertará el amor propio de los alumnos. La teoría de las probabilidades, por ejemplo, y la de las aproximaciones podrán suministrar cuestiones, problemas interesantes y dar lugar a curiosas aplicaciones.

23. Será útil hacer dibujar las construcciones a medida que se explican en el curso, y así realizar, sino con los instrumentos (quizá el tiempo faltara) a lo menos a pulso sobre papel cuadriculado, la solución de los problemas que se estudian. También convendrá hacer dibujar figuras elementales correspondientes a medidas dadas, por ejemplo, un arco de circunferencia (cuya medida sea dada en radios o en grados), un arco de un seno o de una tanjente dados, o bien todavía resolver gráficamente problemas que, aunque insolubles teóricamente por los medios de la geometría elemental, pueden sin embargo, ser resueltos con el grado de aproximación que se desee, como, por ejemplo, encontrar la novena parte de un ángulo, rectificar una circunferencia, hacer la cuadratura de un círculo, etc., valuando en seguida el grado de aproximación teórica y práctica que se haya alcanzado.

En la presentación de los problemas gráficos habrá que darles el aspecto de cuestiones prácticas, como por ejemplo, el trazado de una vía férrea, siendo dados algunos puntos por donde ella debe pasar, o la longitud de ciertos tramos, etc.

24. En la enseñanza secundaria sería de desear que se introdujera, aunque no lo comprendiera el programa, la idea de la representación cartesiana o polar de las funciones por medio de curvas, o aún la representación vectorial, para iniciar a los alumnos en los procedimientos representativos actualmente en uso, aún fuera de las matemáticas; podrá en seguida hablarse de los aparatos

registradores (como el anemógrafo, el sismógrafo, etc.), exponiendo su funcionamiento.

Como aplicación, se hará que los alumnos tracen la curva representativa de algún fenómeno que pasa a su vista, como por ejemplo, la variación de la temperatura de una sala durante las diferentes horas del día, la de la mortalidad de una ciudad durante el curso de un año, etc.

25. El conocimiento de las curvas representativas de las funciones puede servir en la enseñanza secundaria y superior para enseñar a los alumnos su uso en reemplazo de las tablas de cálculo. Así, por ejemplo la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, una vez dibujada, nos da los senos de los arcos que son expresados (en radios) por sus abscisas; la espiral logarítmica $\partial = e^x$ nos da en los argumentos de sus puntos (medidos por el radiante) los logaritmos neperianos de los radios vectores de esos puntos, etc., de tal modo que las curvas trazadas con una exactitud suficiente pueden suplir las tablas de logaritmos y otras además, a lo menos en cierta medida. Para esto se necesitará trazar las curvas por medios distintos a la determinación de sus puntos obtenidos por las coordenadas calculadas por la ecuación; por consiguiente, habrá que enseñar los medios mecánicos o geométricos para el trazado de las principales curvas, a lo menos en la medida que corresponde al grado de la enseñanza.

26. La reducción de escala podrá dar lugar a ejercicios interesantes y útiles.

Por ejemplo, los datos de un problema expresados con cierta unidad podrán ser dibujados a una escala reducida, y se podrá, en esa misma escala, hacer dibujar la solución de los problemas, o reducir a otra escala figuras ya dibujadas.

La reducción de las escalas suministrará la ocasión de enseñar a los alumnos a servirse de los planos topográficos, sea en la medición de alturas, distancias, inclinaciones, etc., o para volver a encontrar una vía ya recorrida que va de un lugar a otro, siendo dada una línea que-

brada recorrida, por medio de la longitud de sus diversos lados, y de las respectivas inclinaciones de los unos sobre los otros.

27. Recordaremos aquí, aunque de ellos ya hemos hablado, y porque se refieren a la enseñanza secundaria, los ejercicios útiles del desarrollo de los sólidos, de las construcciones de poliedros de papel o de alambre, curvas de madera o de metal, lo mismo que los relevamientos topográfiicos con los cuales los alumnos toman en el terreno las medidas necesarias y, si es necesario, ejecutan en su casa los cálculos para la determinación de las diferentes incógnitas.

La práctica, objeto de estudio. — 28. A fin de que mejor se comprenda cuán importante es que los alumnos estudien también la aplicación práctica, conviene recordar que es la práctica la que ha sugerido y, por decirlo así, creado diversas ramas de las ciencias matemáticas. Así, la teoría de las aproximaciones y el cálculo de los errores nacen del empleo de las matemáticas aplicadas a las cosas concretas. La solución gráfica efectiva de los problemas de geometría, que conduce a construcciones más o menos largas y complicadas, y por lo tanto a un grado mayor o menor de precisión, ha dado nacimiento a la geometrografia, que examina y parangona las construcciones del punto de vista de su precisión y de su simplicidad.

Por otra parte, ciertas cuestiones creadas por la práctica han sido, tarde o temprano, directa o indirectamente, la fuente de nuevos estudios y de nuevas teorías. Citaré, por ejemplo, la duplicación del cubo, nacida, si es cierto lo que se dice, de una cuestión práctica planteada por el oráculo, ha hecho nacer construcciones de nuevas curvas y nos ha valido bellos y recientes estudios para demostrar la imposibilidad de su resolución por la geometría elemental.

Necesidad del estudio de la aproximación. — 29. Como ya lo hemos hecho observar, el uso de la práctica exige

que se haga comprender bien a los alumnos que los resultados que se obtiene, si son exactos como casos especiales de casos generales teóricos, no responden exactamente a la práctica (núm. 4). Es, pues, necesario que los alumnos tengan una idea suficientemente exacta del cálculo de las aproximaciones y de los límites de esas aproximaciones mismas, es decir, del grado de aproximación al que se puede llegar. Laurent [1] dice que casi sería un *crimen* no enseñar a resolver cuestiones tan simples e indispensables; y ciertamente ningún otro conocimiento mejor que el cálculo de las aproximaciones puede hacer apreciar la naturaleza real de las investigaciones matemáticas, comparadas con la realidad, y el valor de ésta en las aplicaciones. En verdad esta apreciación sobre la exactitud práctica de una investigación no puede hacerse sin un examen serio de la cuestión por la cual se ejecuta; es, pues, necesario que los alumnos sean iniciados en este examen de los objetos a los cuales se aplica el cálculo, para bien juzgar los límites en los cuales los errores quedan circunscriptos.

Entretanto, podrá hacerse notar, como dice Laisant, « que « es permitido considerar aquí un resultado aproximado « (en teoría), como muy superior a un resultado rigurosamente exacto, si el primero es, por su naturaleza, « mejor adaptado al objeto que se tiene en vista, y si en « suma el error final, del punto de vista práctico, es inferior al que hubiera producido la solución matemática « absoluta ».

Del mismo modo, deberá inculcarse el principio tan importante en las aplicaciones «de proporcionar la apro- « ximación que se desea, a la potencia de los medios « puestos en acción, y a la naturaleza práctica de las « cuestiones. Este que valuara el aire de un campo de « algunas hectáreas, equivocándose en un área o dos,

(1) *Laurent.* -- Las matemáticas especiales en Francia (L'enseignement mathematique, 1899).

« sería un pésimo agrimensor; pero, aquel que preten-
« diera determinarla con la aproximación de un milíme-
« tro cuadrado, sería un loco » (Laisant).

Klein, en la sexta de las conferencias sobre las matemáticas realizadas en Chicago, insiste también sobre el mismo punto, al manifestar que «los desarrollos matemá-
« ticos que ultrapujan los límites rigurosos de la ciencia
« aplicada no tienen ningún valor práctico ».

Por lo tanto, los jóvenes deberán ser ejercitados en la apreciación de la aproximación que es conveniente investigar relativamente al resultado, por una parte, y por la otra de lo que debe exigirse relativamente a los datos del problema. Deberá también hacerse comprender el grado de precisión necesario en el uso de los instrumentos de cálculo, proporcionalmente al grado de aproximación que necesariamente no deberá excederse en las cuestiones especiales. Esto sea dicho para la elección de las tablas de logaritmos, para las cuales, salvo raras excepciones, 4 o 5 decimales bastan.

Sirviéndose de tablas de siete decimales o más todavía, por ejemplo en los cálculos de longitudes en que los métodos empleados hacen posible un error de 1 a 2 metros por una veintena de kilómetros, la aproximación que se obtendría sería así una apariencia quimérica y engañosa. Es ésta también la opinión de Laisant.

Medios mecánicos para la resolución de los problemas. — 30. La introducción de las cuestiones prácticas en la enseñanza dará ocasión (en las escuelas más adelantadas y con jóvenes suficientemente instruídos), de enseñar a lo menos el uso de los principales instrumentos y aparatos con los cuales pueden ejecutarse y simplificarse los cálculos y las construcciones. Después de haber familiarizado a los alumnos con las tablas propiamente dichas (logaritmos, etc.), podrá hablárseles de los abacos y de las reglas logarítmicas. Así se les habituará a munirse de las curvas representativas de las funciones para determinar, con suficiente aproximación, los valores para

los cuales esas funciones se encuentran en ciertas condiciones, y por lo tanto para resolver ecuaciones.

También será útil hablar de los medios físicos por los cuales pueden resolverse ecuaciones, por ejemplo, del empleo de los líquidos, y en general, de las máquinas que han sido construídas para la ejecución de los cálculos y la investigación de las funciones; entre esas máquinas, algunas, como el aritmómetro, son ampliamente empleadas en la práctica, y otras, como el intégrafo, tienen muchas aplicaciones.

XI

REFORMAS QUE DEBEN HACERSE EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

(Por Gino Loria, profesor de la Universidad de Génova)

. . . .

Un primer progreso que sería de desear se realizara en la enseñanza de las matemáticas puras, consiste, según mi criterio, en una *aceleración,* si puedo expresarme así, *de su marcha.* El imponente edificio, cuyas sólidas bases construyeron los antiguos geómetras, tiende siempre a crecer en altura, en amplitud y aún en profundidad; si nos limitamos a enseñar a los alumnos la configuración del piso bajo (que es, desde luego, el más oscuro y el menos atrayente), es probable que ellos no tengan ni el tiempo ni el deseo de subir a los pisos superiores, con la esperanza de llegar a la cumbre del edificio. Ahora, este aumento de velocidad es, sin duda posible, pues en los elementos hay muchos capítulos, que eran absolutamente indispensables en el *antiguo régimen* de nuestra ciencia, pero que para los modernos aparecen como objetos de lujo, que el historiador debe guardar religiosamente en el museo de las glorias del espíritu humano, pero que, en una primera enseñanza, debe ceder su lugar a cosas de utilidad más directa. Me limito a citar como

ejemplo la *teoría de las proporciones* (¡que la sombra de Euclides me perdone este sacrificio que pido del V libro de sus *Elementos*, uno de los más bellos monumentos de la antigua geometría!) y la teoría elemental de las secciones cónicas, creación de Apolonio, ciertamente sublime, pero de la cual Descartes y Fermat por una parte, Chasles y Steiner por la otra, han disminuído la importancia; podría agregar otros ejemplos, si no deseara abreviar. En su lugar podrían ponerse ciertas teorías que se llaman superiores, pero que sería posible y urgente democratizar (por ejemplo, geometría analítica, geometría descriptiva, etc.).

Por otra parte, sería de desear que se diera una idea bastante extensa de las *aplicaciones* que actualmente reciben las matemáticas. La acción recíproca de la ciencia pura y de la ciencia aplicada ha sido expuesta muy recientemente por Poincaré, en su hermoso libro *El valor de la ciencia*, de una manera tan luminosa que es completamente inútil que yo repita mal lo que él tan bien ha dicho. Pero no es inútil observar que las aplicaciones de las matemáticas pueden encontrarse en todas las secciones de nuestra ciencia, desde las más elementales hasta las más elevadas y modernas. Señalándolas, no solamente se llegará a aumentar el atractivo de las teorías puras, sino que se ensanchará el horizonte de las ideas de los alumnos; se cautivará la atención de los que se interesan en los *hechos* lo mismo que de los que sólo tienen en vista las *ideas*, y se organizará la enseñanza de las matemáticas de manera que responda, mejor que en el pasado, a las necesidades de las otras materias de la enseñanza.

Por lo que se refiere a la preparación de los profesores de matemáticas, el cambio que me parece necesario es todavía más profundo. Pues, mientras, por ejemplo, los alumnos de medicina tienen siempre en su mente la visión de su futura profesión, a los que aspiran a ser profesores de matemáticas casi nunca (podría borrar el *casi*) se les hace pensar en el rol que deberán desempe-

ñar en la vida. Oyen hablar de alta ciencia, aun se esfuerzan por contribuir al progreso de nuestros conocimientos positivos, pero nunca se preocupan de la manera de salir de apuros cuando están obligados a hacer comprender una teoría matemática a un público ignorante. Por ejemplo, ¿están ejercitados en el cálculo numérico?, ¿les enseñan a dibujar en el pizarrón figuras vèrosímiles que realmente sirvan de auxilio a los alumnos?, ¿conocen los resultados obtenidos por la pedagogía desde que ella en todas direcciones es la vía trillada por la psicología científica?... En la ignorancia de todo esto el joven profesor debe iniciarse por ensayos más o menos felices a expensas de sus alumnos!

Desde 1898, en una conferencia que dí en Turín, en un Congreso, he expuesto un programa bastante detallado de un curso histórico-crítico sobre las teorías de que se componen las matemáticas elementales (geometría y trigonometría, aritmética y álgebra), curso que, según mi criterio, serviría muy bien como lazo de unión entre la enseñanza universitaria y la instrucción media. La buena acogida que dieron a mis ideas personas de gran competencia me hizo creer que entonces estaba en el buen camino. Desgraciadamente me ha faltado el tiempo para traducir mi programa en un libro o en un curso de lecciones; pero debo declarar que si he tenido falta de tiempo, no me ha faltado la fe en mi tesis; pues sigo creyendo que una exposición comparada de los métodos seguidos por los antiguos y por los modernos para concebir y exponer las teorías fundamentales de la geometría y del álgebra elementales, acompañada de una vista crítica de las objeciones elevadas contra la falta de rigor de ciertos procedimientos y de las nuevas doctrinas creadas en consecuencia (por ejemplo, geometría noeuclídea, números irracionales, etc.) formaría una excelente preparación para el alumno aspirante a profesor. En ese caso, podría decirse con Cicerón: *historia, magister vita.*

El perfeccionamiento del rol que desempeñan los establecimientos superiores para la preparación de los profesores de matemáticas de las escuelas medias es una cuestión de elevado interés general y es muy de desear que el *referéndum* en el que acabo de tomar una débil parte, de los resultados que todos los gobiernos se apresurarán a adoptar.

Suiza

I

LAS MATEMÁTICAS Y LA ENSEÑANZA SECUNDARIA EN SUIZA

(Extracto de un informe del profesor Branderberger) (1)

Pocas cuestiones en los países civilizados son tan importantes como las de enseñanza secundaria. La tarea no es de fácil definición, pero siendo su objeto en cada nación formar gran parte de la generación cultivada del porvenir, no llenaría sus fines si no desarrollara junto a un ardiente amor de la verdad, un sincero entusiasmo por lo bello y por el bien.

La plena posesión de sí mismo, que se querría encontrar en todo adolescente, sólo se adquiere lentamente. Para que la escuela pueda hacerla efectiva, es necesario que le inculque al niño, al mismo tiempo que una viva afección por el medio al cual pertenece, el sentimiento no menos neto, de lo que es, y debe ser, como miembro de la humanidad entera. El joven, pues, debe ser, conducido, por la instrucción que recibe, a ganar en individualidad, como también a que cada día se haga más consciente de su universalidad.

La escuela trata de alcanzar el primero de esos fines por el estudio de la lengua, de la literatura, de la historia y de la geografía del país a que pertenece. Se trata aquí de lo que puede llamar la educación nacional. Persigue el segundo fin poniendo lo más posible a la juventud en relación con lo que ya no es cualidad exclusiva de ninguna persona, con las lenguas antiguas, por ejemplo, las ciencias en general o las matemáticas.

Es sumergiéndose en esas grandes manifestaciones que

(1) Publicado en L'Enseignement mathematique, 1917.

el espíritu se pone mejor en contacto con el infinito. Parece, sin embargo, que nada como las matemáticas establece de una manera tan perentoria, la universalidad de nuestro entendimiento.

La Sociedad Suiza de los Profesores de Matemáticas, reunida en Baden en Octubre de 1916, tenía que pronunciarse sobre la importancia recíproca de la educación nacional y de la educación que tiene por base el estudio algo profundo de las ciencias matemáticas. El debate no ha sido cerrado y figura en la orden del día de la próxima asamblea. Sería, pues, prematuro decidirse por uno de los partidos. Lo que deseamos hacer resaltar es la importancia que ese debate y el admirable informe del profesor Branderberger tienen para los que se interesan por la educación. Parece realmente difícil, sin el previo estudio de ese trabajo, pronunciarse con alguna competencia sobre la cuestión suscitada.

Por esa razón, vamos a dar un análisis sucinto del notable trabajo del profesor Branderberger.

En ese estudio que remonta a 1911, pero cuya actualidad se mantiene íntegra, el profesor Branderberger ha reunido el conjunto de los resultados de una encuesta organizada por la subcomisión suiza de la enseñanza de las matemáticas. Las indicaciones recogidas provienen de toda la Suiza, y son todo lo completas posibles, pues el autor, durante la elaboración de su trabajo, no ha titubeado en ningún caso en pedir en todas partes los informes que consideraba necesarios. El trabajo empieza por las consideraciones sobre la influencia ejercida por la Confederación sobre los establecimientos secundarios de su territorio. Esta influencia tiene su origen en las condiciones que impone: 1.º a los futuros estudiantes de medicina; 2.º a los jóvenes que, preparándose para la carrera de ingeniero, se proponen pasar por la Escuela Politécnica. Todos los establecimientos suizos, o por lo menos su mayor parte, se encuentran en la necesidad de organizar su programa teniendo en cuenta esos dos fac-

tores. Su diversidad no por eso es menos grande. Se comprueba de inmediato tomándose el trabajo de examinar los cuadros firmados por el profesor Branderberger. Cada uno de ellos indica exactamente, pero de una manera esquemática, al mismo tiempo que la edad del alumno, el correspondiente número de lecciones de matemáticas que recibe por semana en cada disciplina. Esos cuadros, muy condensados, permiten fáciles comparaciones: en número de 60 están distribuídos en 12 páginas. El profesor Branderberger los discute con cuidado, de modo que muy pronto es posible ponerse al corriente de sus menores particularidades.

El segundo capítulo está consagrado al valor educativo de la enseñanza matemática, tal como se la comprende en Suiza, así como a su alcance práctico. Para caracterizarla, da el profesor Branderberger una lista de problemas compuestos en las diferentes escuelas en los exámenes de madurez. A cada escuela corresponde un grupo especial; sólo hay, pues, que considerar cada uno de ellos para tener idea de la materia enseñada en el establecimiento.

El profesor Branderberger, en el tercer capítulo, se ocupa de los programas de enseñanza. Estos son lo más variados posible, tanto del punto de vista de la forma como del fondo. En su variedad no hay más igualdad que la de la organización de las escuelas. Para facilitar las comparaciones, presenta dos estados: uno para los gimnasios propiamente dichos; el otro para las escuelas científicas. Indican de una manera simple lo que respectivamente se hace, en más o en menos, respecto de las exigencias federales. A primera vista se observa que las escuelas tienen más bien la tendencia de ultrapasar bastante esas exigencias, y que su enseñanza, en ciertos capítulos especiales, es con frecuencia demasiado completa. De una manera general ellas tratan también de iniciar a los alumnos en las aplicaciones prácticas. Por otra parte, la noción de función parece desempeñar cada

vez más un rol esencial. Sin embargo, sería deseable que toda modificación feliz en un plan de estudios comprendiera al mismo tiempo la eliminación de capítulos que han llegado a ser inútiles. Desgraciadamente esto rara vez ocurre.

En fin, es imposible explicar de una manera plausible la gran diversidad de los programas, si no es observando que las escuelas secundarias son cantonales, y hasta municipales o comunales, algunas veces. Esto tiene su parte buena y su parte mala. Sin embargo, puede preguntarse si su grande independencia respecto de la Confederación no es más bien ventajosa. Ella facilita, y mucho, la introducción de reformas reconocidas necesarias por el personal enseñante.

Una de las partes más interesantes del volumen es el cuarto capítulo, en el cual el profesor Branderberger trata de los métodos de enseñanza. Este capítulo, el más desarrollado de todos, comprende tres divisiones. En las dos primeras, relacionadas, una con la aritmética, el álgebra y el análisis, la otra con la geometría, las vistas de sus correspondientes ocasionales están expuestas con claridad y precisión. Tomando un ejemplo al acaso, se observará allí que entre la gran cantidad de cuestiones examinadas, la manera como se encara, en las diversas escuelas secundarias suizas, el análisis combinatorio y los temas que con él se relacionan, hasta la teoría de los seguros, pasando por la fórmula del binomio, los determinantes y el cálculo de probabilidades.

Después de dar a conocer las diversas opiniones, el profesor Branderberger expone la suya. Es así como trata todos los capítulos especiales, trátese, para no citar más que los extremos, de aritmética elemental o de cálculo diferencial e integral, de planimetría o de dibujo de máquinas.

La tercera división del mismo capítulo se refiere a la enseñanza matemática considerada de un punto de vista completamente general. En el párrafo 30 el autor mues-

tra lo que un alumno normal debe ser susceptible de obtener de él. En el 31 insiste sobre el método que debe seguirse en la exposición y en la utilidad de una buena preparación pedagógica del futuro profesor. Reconoce con facilidad que algunos de ellos poseen el don innato de la enseñanza, pero para éstos también cree que una iniciación en la pedagogía, lejos de ser superflua, sólo puede ofrecerles serias ventajas.

El párrafo 32 se refiere al modo como la enseñanza de las disciplinas matemáticas deben ser coordinadas. El profesor Branderberger señala a este respecto gran número de temas de lecciones sobre las cuales los profesores sería mejor que no insistieran. [1]

Respecto del análisis combinatorio, ya mencionado, observa expresamente que inútil es ocuparse de él en detalle. Por otra parte manifiesta el deseo que cada vez más se tendiera a concentrar la enseñanza matemática alrededor de una única noción, la de función o, como también puede decirse, la de dependencia funcional. En aritmética y en álgebra, como en geometría, el profesor puede muy bien llegar a que poco a poco, esa noción concluya por tomar un sitio preponderante en todas las consideraciones. « La instrucción y la educación, dice Branderberger, tienen como fin último la formación de la voluntad: pero la voluntad sólo existe cuando no hay en el saber ni contradicción ni falta de unidad. Para que así pueda ser, es pues indispensable que la comunicación de nuevos conocimientos se haga observando tan estrictamente como sea posible un solo y único principio: el de la concentración ».

Este principio de concentración no debe ser aplicado a las matemáticas solamente. Es necesario también recordarlo para la coordinación del conjunto de los cursos

(1) Varias proposiciones del profesor Branderberger han hecho camino después de la publicación de su trabajo: es así que en la sesión de Octubre de 1915 en Baden, la Sociedad de Profesores Secundarios de Matemáticas, examinó qué capítulos podrían actualmente suprimirse de los programas de enseñanza.

de un mismo establecimiento. El profesor Branderberger lo dice de paso, pero sin detenerse en esta cuestión tan importante, que lo hubiera llevado lejos del cuadro que se impuso.

En su hermosa conferencia [1] sobre *la adaptación de la enseñanza secundaria a los progresos de la ciencia*, realizada en Abril de 1914, en París, con motivo de la reunión internacional de la Enseñanza matemática, el profesor Borel habló de este tema tan digno de atención.

En el quinto capítulo se trata la cuestión de los exámenes, mientras que la referente a la formación efectiva de los profesores, del punto de vista pedagógico, [2] se examina en el sexto y último.

Lo que más llama la atención en la enseñanza suiza, en todos los grados, y cualesquiera que sean las disciplinas científicas o literarias que se consideren, es su gran diversidad. De una localidad a otra, la organización de las escuelas, las materias profesadas pertenecientes a un mismo dominio, las exigencias relativas a los miembros del cuerpo enseñante, varían completamente. No hay en ello grandes inconvenientes para la formación general de los espíritus, puesto que en todas esas localidades la enseñanza está comprendida de la manera más digna, y que es con toda conciencia que los profesores suizos se consagran a sus delicadas funciones. Aun podría pretenderse que con eso ningún perjuicio resulta tampoco para la formación de la inteligencia matemática propiamente dicha. La ciencia matemática, en efecto, no menos que cualquiera otra, no requiere para ser adquirida caminos trazados de antemano y fundados sobre principios inmutables, ellos mismos fruto de experiencias muchas veces

(1) Véase páginas 575 y siguientes de este tomo.

(2) De este punto de vista las ideas emitidas por Branderberger no han dejado de dar sus frutos. Puede verse en *L'enseignement mathematique*, 1914, los votos expresados en 1913 por la Sociedad Suiza de profesores de enseñanza secundaria. Se sabe también que la Escuela Politécnica, desde hace varios años, ha instituído cursos de metodología y de didáctica matemática, que precisamente son dirigidos por el profesor Branderberger.

seculares. El sentimiento de lo contrario es como un resto de escolástica que irá constantemente debilitándose.

Como lo hacía notar el profesor Roorda en Baden, en Octubre de 1916, [1] no hay entre el espíritu geométrico y el espíritu de fineza, una oposición tan radical como quizá se la imaginó Pascal. Los hechos parecen refutar cada día más las afirmaciones hechas al respecto por el célebre matemático. « La representación que se hace con frecuencia de la ciencia matemática, considerándola como una serie lineal o un pequeño número de series lineales, en cada una de las cuales el orden riguroso de los antecedentes y de las consecuentes no puede ser modificado es errónea. « Los verdaderos elementos de las matemáticas, de los cuales no puede prescindirse para ir más adelante, se reducen a poca cosa; a las nociones de aritmética y de geometría necesarias para comprender y aplicar el sistema métrico, basta agregar los principios de la notación algebraica para tener una base sólida, a partir de la cual puede estudiarse las matemáticas en direcciones variadas, sin que un orden de materias particular sea impuesto más que por la tradición y la costumbre ».

Sí, pues, cualquiera que sea la organización de cada escuela, y más especialmente la de la enseñanza matemática, nos atenemos en lo posible a una concentración de la enseñanza, no sufrirá perjuicio la formación de las inteligencias.

Pero habrá otros inconvenientes. Si las escuelas de todos los grados se mantienen demasiado aisladas unas de otras y no tratan de cerrar más fuertemente los lazos que las unen, no podrán conseguirse muchos progresos de solidaridad nacional deseables.

. . . .

(1) En este volumen aparece la conferencia del profesor Roorda.

II

LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA SUIZA

(Informe presentado en el 4.º Congreso Internacional de Matemáticas en Roma, Abril de 1908, por el profesor H. Fehr) (1)

1. — Es satisfactorio comprobar que actualmente, en los principales países, la enseñanza científica es objeto de profundos estudios en vista de una mejor adaptación de los planes de estudio y de los métodos a las necesidades de la vida económica y de la ciencia moderna. Se han propuesto importantes reformas, que interesan igualmente a los diversos grados de enseñanza.

Desde el principio, han comprendido los sabios que no debían permanecer indiferentes a este movimiento, del cual ellos serían los primeros en utilizar sus buenos resultados. El Comité del Congreso ha estado, pues, bien inspirado al provocar una serie de estudios similares sobre la enseñanza matemática en los principales países.

Voy a ensayar dar aquí una información muy breve de lo que se hace en Suiza. La tarea no es tan simple como podría creerse a primera vista, pues nos encontramos en presencia, no de un tipo único de escuelas, sino de establecimientos que varían de un cantón a otro. En Suiza la instrucción pública es, en efecto, del resorte de los cantones, en número de veintidos. Si agrego que en muchos de ellos la organización es municipal, comprenderéis que la mayor diversidad reina en mi país en los planes de estudio, o por lo menos en la organización de los estudios.

Los inconvenientes de tal sistema son mínimos comparados con las ventajas que ofrece una organización que permite tener en cuenta, en la medida de lo posible, in-

(1) El doctor Fehr, es profesor en la Universidad de Ginebra y con Laisant dirige *L'Enseignement Mathematique.*

tereses regionales. Esta gran independencia de las autoridades escolares facilita considerablemente el estudio y la realización de reformas, tanto más que una gran libertad de iniciativa se deja, generalmente, al cuerpo enseñante. Con menos rodajes puramente administrativos tal vez más progresos fueran de fácil realización. No causará por lo tanto sorpresa comprobar que los pedidos de reformas, que son todavía motivo de numerosas diligencias en las grandes naciones, hayan recibido satisfacción desde hace mucho tiempo en Suiza. Así, para no dar más que un ejemplo, señalaré el hecho de que, en muchos gimnasios científicos (1) la primera iniciación del cálculo infinitesimal figura en el plan de estudios desde hace más de medio siglo.

El tiempo, necesariamente muy limitado acordado a cada comunicación, me obliga a restringir lo más posible el tema. Me limitaré a mostraros el sitio que se ha señalado a las matemáticas en nuestros gimnasios. Sin embargo, antes de abordar esta cuestión, es indispensable echar un golpe de vista muy rápido sobre la organización misma de los establecimientos secundarios.

2. Las escuelas medias que conducen a los estudios superiores, llevan nombres diversos según los cantones: *Colegio, Gimnasio, Escuela real superior (obere Realschule), Escuela cantonal (Kantons schule)*. Es esta última la denominación más difundida en cantones de lengua alemana.

Examinados del punto de vista de su organización exterior, esos establecimientos presentan diferencias bastante notables. Tienen generalmente *dos ciclos*. El primer ciclo es de 3 o 4 años y forma el *colegio o gimnasio inferior*, el segundo ciclo comprende 4 años (4 1/2 años en algunos gimnasios), ingresando los alumnos a la edad de 14 o 15 años.

(1) En Bale, la Escuela Real superior ha sido prolongada con una clase en 1856 - 57, con el siguiente programa: álgebra superior, 2 horas; geometría analítica, 2 horas; cálculo infinitesimal, 2 horas; mecánica, 4; geometría descriptiva, 4; mineralogía, 2; historia de los descubrimientos, 1.

Los gimnasios están divididos en 2 o 3, y algunas veces en 4 *Secciones*, según las lenguas extrangeras que en ellos se enseña. Dejamos de lado la Sección comercial que se encuentra en muchos establecimientos. En algunas ciudades la escuela de comercio forma, en efecto, una sección de la Escuela cantonal, por ejemplo, en Zurich, Berna, Lucerna, Aaran, Bale, San Gal.

Las *dos grandes secciones,* comunes a todos los gimnasios, son:

a) la *Sección clásica,* que conduce a todas las Facultades universitarias (y a la Escuela politécnica federal, mediante un complemento de estudios matemáticos); las ramas especiales, son: el Latín, el Griego y la Filosofía.

b) la Sección *técnica* o *industrial,* que más particularmente conduce a las carreras científicas, técnicas o industriales. Lleva nombres diferentes, según las ciudades: en Aaran y Ginebra, es la *Sección técnica,* en Berna, la *escuela real (Realschule),* en Bale, *escuela real superior (obere Realschule),* en Zurich, Franenfeld y San Gal, *escuela industrial (Industrieschule),* en los cantones de Vaud y de Neufchatel, *Gimnasio o Sección científica,* etc.

Los alumnos que salen de esta Sección son admitidos directamente en las Facultades de Ciencias y Letras, en la Facultad técnica de Lausana y en la Escuela politécnica federal.

El gimnasio de Ginebra posee también otras dos secciones:

c) La *Sección real,* creada en 1886, que comprende, junto a los estudios de las lenguas modernas, el del latín. Más o menos, corresponde a la sección *Latín-ciencias* de Francia y al *Gimnasio real* alemán. Una sección análoga ha sido creada en Zurich en 1905. El examen de salida permite el ingreso a todas las facultades universitarias.

d) La *sección pedagógica,* que prepara los candidatos a la enseñanza primaria y que, además, conduce a las Facultades de Ciencias y de Letras (para las letras moder-

nas y las ciencias sociales). La enseñanza científica es la misma que en la sección real.

Al fin del Gimnasio los alumnos obtienen, mediante examen, un *diploma de madurez* en el cual se indica el nombre de la sección correspondiente.

3. Pasemos a la *organización de los estudios matemáticos*. En muchos establecimientos, éstos se reparten en *dos ciclos;* el primer ciclo corresponde al Gimnasio inferior y tiene por fin suministrar una *primera iniciación* al Algebra y a la Geometría. En este primer estudio, ya precedido por una primera preparación suministrada por la Escuela primaria, la enseñanza de la Geometría se basa únicamente sobre el método intuitivo, el profesor recurre a la superposición y a la descomposición de las figuras; los alumnos hacen dibujos de construcciones geométricas por medio de instrumentos, principalmente ejercicios sencillos sobre lugares geométricos.

El tiempo consagrado a la aritmética, a la introducción al álgebra y a la geometría, es generalmente de cuatro horas semanales.

Sin duda este período de iniciación no existe en todos los establecimientos, de una manera igualmente completa, pero en aquellos en que se aplica, ha dado excelentes resultados. Me parece inútil insistir aquí sobre la necesidad de hacer preceder el estudio teórico de las matemáticas de una enseñanza intuitiva en la cual se familiariza a los jóvenes alumnos con las figuras geométricas y sus propiedades más simples y con el empleo de la regla y del compás en la resolución de problemas elementales. Procediendo así, no han hecho más que seguir la vía trazada por Pestalozzi, que debió necesariamente dejar muchos discípulos entre sus compatriotas, de los cuales el más ilustre es sin duda el gran geómetra Steiner. Una nueva impulsión acaba de darse a este examen de iniciación, por lo menos en los medios donde todavía no había obtenido su pleno desarrollo, por Laisant, uno de los fundadores de nuestros Congresos, gracias a su reciente libro sobre *La iniciación matemática.*

4. Examinemos ahora cual es el *fin* y el *plan de estudios de la enseñanza matemática en la división superior de los gimnasios.* Si se recorren los diversos programas, se observa que, generalmente, se ha reconocido que junto al rol que ejercen las matemáticas sobre el desarrollo lógico del pensamiento en el alumno, debía tenerse en cuenta la importancia de las matemáticas en la vida diaria y en el estudio de los fenómenos de la naturaleza.

Citaré el siguiente texto referente al fin de la enseñanza matemática de la Escuela Cantonal de Zurich (programa 1907, sección clásica):

« *Fines de la enseñanza.* — Conocimiento de los cálculos « numéricos, principalmente de los cálculos mentales y « de la solución de los problemas de la vida ciudadana « Enseñanza para un modo de pensar claro y lógico y « el desarrollo de las facultades de criterio. Ojeada in- « trospectiva de la manera de tratar matemáticamente « los problemas de la vida práctica y los fenómenos sen- « cillos de la naturaleza. »

En el programa de la sección real esta última parte ha sido completada como sigue:

« Adquisición de la facultad de poder tratar y resolver « matemáticamente los problemas de la vida práctica, de « la naturaleza y de la técnica. »

Para alcanzar este fin los gimnasios acuerdan un amplio espacio a las consideraciones tomadas de las ciencias aplicadas. Así en muchos establecimientos (clásicos e industriales) la enseñanza de las nociones de Trigonometría esférica es seguida de un curso de Geografía matemática o de Cosmografía. En las secciones industriales de los principales gimnasios el dibujo técnico comprende, en las últimas clases, una serie de lecciones de levantamiento de planos con numerosos ejercicios prácticos sobre el terreno.

En cuanto al tiempo afectado a la enseñanza matemática, es generalmente de *4 horas,* en las *Secciones clásicas,* y de *6* a *8 horas* (algunas veces de 10 horas en la última clase) en las *secciones industriales.*

El plan de estudios de las secciones clásicas comprende el Algebra, la Geometría, la Trigonometría, la Geometría Analítica, la Cosmografía.

En las secciones industriales esas mismas materias son estudiadas con más profundidad; se agrega además el Algebra superior, el Cálculo infinitesimal y la Geometría descriptiva.

5. La extensión de los programas de esas diferentes materias ofrece algunas diferencias al pasar de una ciudad a otra. Es principalmente en el dominio de la Geometría que se encuentra mayor variedad. Los gimnasios de la Suiza oriental acuerdan generalmente mayor importancia a las nociones tomadas de la Geometría moderna.

Pero, todos los programas tienen necesariamente una parte común, un mínimo, correspondiente a las prescripciones de las comisiones federales. En efecto, aunque las escuelas medias sólo dependen de la administración cantonal o municipal, el Gobierno federal ejerce, sin embargo, cierta influencia, e indirectamente un contralor, sobre los estudios secundarios superiores en las secciones clásicas e industriales. Esto proviene de que en Suiza las carreras médicas están sometidas a un diploma federal. Se han instituido *exámenes federales de madurez para los candidatos a las profesiones médicas*. Los diplomas cantonales pueden ser juzgados equivalentes, si son acordados por escuelas cuya organización y programas garantizan una buena preparación para los estudios universitarios. Para este efecto, el Consejo Federal hace formar una lista de las escuelas medias suizas cuyos certificados de salida son reconocidos como certificados de madurez.

Como el programa federal exige el conocimiento del latín, con el griego como materia facultativa, los *gimnasios clásicos o reales* deben necesariamente tenerlo en cuenta en sus planes de estudio. Constituye para ellos un mínimo que general se sobrepasa.

Vease el texto del *programa federal de madurez para los*

candidatos a las profesiones médicas, en lo que se refiere a las Matemáticas y a la Física. [1]

MATEMÁTICAS.— *a) Algebra.*— Operaciones algebriacas. Ecuaciones de 1.º y 2.º grado con una o más incógnitas. Logaritmos. Progresiones aritméticas y geométrias. Intereses compuestos y anualidades. Elementos de la teoría de las combinaciones y del cálculo de probabilidades. Binomio de Newton con exponentes enteros.

b) Geometría.— Planimetría, estereometría, trigonometría plana. Habilidad en la construcción de figuras geométricas. Geometría analítica plana: punto, línea recta, círculo; teoría elemental de las secciones cónicas (formas más simples de las ecuaciones). Aplicación de la teoría de las coordenadas a la representación gráfica de funciones analíticas simples y de funciones elementales de cantidades físicas y mecánicas.

Física.—Propiedades generales de los cuerpos sólidos líquidos y gaseosos. Leyes principales del sonido, de la luz, del calor, del magnetismo y de la electricidad.

Elementos de Geografía física.

Es ese el mínimo de los conocimientos matemáticos que suministran los gimnasios clásicos en Suiza. Observaréis que contiene la *Geometría analítica* que, por lo demás, es enseñada desde hace mucho tiempo en el Gimnasio clásico, aun antes de que el programa federal la mencionara. Se encuentra también las aplicaciones a la representación gráfica de funciones simples. Esta última parte ha sido agregada en 1906. Esas nociones se encontraban ya implícitamente comprendidas en la enseñanza de la geometría analítica; se trataba principalmente de desarrollarlas teniendo en cuenta necesidades modernas de las ciencias aplicadas. La *Asociación Suiza de los profesores de matemáticas* ha reconocido esa necesidad, adoptando por unanimidad las tésis que tuve el honor de someterle en Diciembre de 1904, cuyo texto es el siguiente:

---

(1) Programa de 6 de Julio de 1906.

I.—*En razon de su importancia y de su alcance, la noción de función y los problemas fundamentales que a ella se refieren, pertenecen al programa de la enseñanza matemática de las escuelas medias.*

II.—*En cuanto a la extensión y al método se deberá, por una parte, limitarse a las nociones fundamentales, y a sus aplicaciones típicas más simples, y, por otra parte, evitar una exposición puramente abstracta.*

A propuesta del profesor Suter fué agregado un tercer voto, también adoptado por unanimidad:

III.—*Es deseable que en la enseñanza secundaria superior, principalmente en los gimnasios, se conceda mayor importancia al desarrollo histórico de las matemáticas.*

6. El programa arriba mencionado se encuentra, pues, necesariamente en el programa de los gimnasios, que deben tenerlo en cuenta al elaborar su plan de estudios. Cada establecimiento, tiene libertad de fijar su *programa detallado*, resultando de ésto gran variedad de programas. En general, el programa federal es excedido, o por lo menos tratado de una manera muy amplia. Así, unos conceden importancia a las nociones de geometría moderna y al estudio sintético de las secciones cónicas. La estereometría comprende algunas veces nociones de Geometría descriptiva, y esta manera más amplia de encarar la estereometría debiera ser adoptada en todos los establecimientos que no den una enseñanza propiamente dicha de la Geometría descriptiva. Muchos gimnasios (por ejemplo, Berna, La Chaux-de-Fonds, San Gall) continúan la Trigonometría plana con los elementos de la Trigonometría esférica y sus aplicaciones simples a la Geografía matemática. Algunos programas mencionan también ecuaciones cúbicas, las nociones sobre los números complejos, y las ecuaciones en general, (por ejemplo Berna, La Chaux-de-Fonds), o las series (Berna). La noción de función con representación gráfica figura explícitamente en la mayor parte de los programas; algunos agregan las primeras nociónes del cálculo diferencial e integral (por ejemplo Frauserfeld, Schaffhouse).

No haremos aquí un estudio comparado de los diversos programas. Lo que precede muestra suficientemente que en Suiza las matemáticas ocupan un buen espacio en los establecimientos clásicos. Nadie deja de reconocer en Suiza que las matemáticas pertenecen al conjunto de conocimientos que forman la cultura general indispensable para todas las carreras liberales, y cada uno reconoce que los elementos que se enseñan en los gimnasios están al alcance de todo cerebro normalmente constituído. La leyenda de la protuberancia matemática, en lo que se refiere a los elementos, tiende cada vez más a desaparecer.

7. Si ahora pasamos a las *secciones científicas* (industriales o técnicas) observamos que aquí también hay un programa mínimo que deben haber recorrido los alumnos que ingresan en la Escuela politécnica federal (Zurich). El Consejo de la Escuela establece una lista de los gimnasios científicos cuyo diploma de madurez dispensa de los exámenes de ingreso. Este programa comprende los temas siguientes referentes a las matemáticas:

Los elementos del Algebra (comprendiendo las nociones sobre la teoría de las ecuaciones y las series), la Geometría de dos y tres dimensiones, la Trigonometría plana y esférica; la Geometría analítica de dos dimensiones, con nociones sobre la Geometría analítica del espacio, la Geometría descriptiva. Los elementos de la teoría del movimiento y de la mecánica de los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos.

Véase, como ejemplo, como esas materias han sido distribuídas en el plan de estudios de algunos gimnasios.

BALE.—*Escuela real superior* (duración 4 $^1/_2$ años; edad de admisión, 14 años cumplidos):

Clase I. — Aritmética y Algebra hasta las ecuaciones de primer grado con varias incógnitas (3 horas). Geometría, planimetría y principio de la estereometría (3 horas). Dibujo geométrico (2 horas).

Clase II. — Algebra: potencias enteras y fraccionarias,

logaritmos, ecuaciones de 2.º grado (3 horas). Geometría, estereometría (2 horas). Dibujo geométrico (2 horas).

Clase III. — Algebra: progresiones, intereses compuestos, anualidades, aplicaciones a los cálculos de seguros, Análisis combinatorio. Determinantes (3 horas). Geometría: trigonometría plana y esférica (3 horas). Dibujo geométrico con trabajos prácticos sobre el terreno (2 horas).

Clase IV. — Algebra: la ley del binomio; series, números complejos. Resolución de las ecuaciones de grado superior, ecuaciones trascendentes (2 horas). Geometría analitica (2 horas). Geometría descriptiva (2 horas). Dibujo geométrico, dibujo de geometría descriptiva (2 horas).

Clase V. (Un semestre). — Algebra: elementos del Cálculo diferencial con aplicaciones simples a la Geometría y a la Física (3 horas). Geometría analítica de 3 dimensiones (3 horas). Geometría descriptiva (2 horas); dibujo de descriptiva (2 horas).

Los *elementos de mecánica*, en general, forman parte del programa de Física. (Bale, Zurich, Ginebra, etc); sin embargo en algunos gimnasios son enseñados por el profesor de matemáticas y figuran en el plan de estudios con 1 o 2 horas por semana, durante 1 o 2 años (Lausana, La Chaux-de-Fonds), etc.

. . . .

. . . .

8. Ahora quedaría todavía una serie de cuestiones por desarrollar aquí para dar una idea completa de la organización de los estudios matemáticos en los gimnasios suizos. Sería interesante tener algunas indicaciones sobre los métodos de enseñanza, principalmente sobre la enseñanza de la Geometría, sobre el empleo de los modelos matemáticos, sobre el uso de los textos, sobre la parte acordada a los ejercicios y a los problemas en las lecciones y en los exámenes, etc. Sobre ésto también gozan de la mayor libertad los profesores y se notan grandes diferencias cuando se pasa de un gimnasio a otro.

Me he limitado a exponer un estado de la importancia acordada a las matemáticas. No es éste el sitio de acompañarlo de un estudio crítico que más bien sería dirigido a algunos establecimientos que al conjunto de las escuelas medias. Pues, evidentemente, existen algunas más o menos grandes en algunos gimnasios. Así, en Geometría, no se concede siempre suficiente tiempo a la Estereometría y a la Geometría práctica, mientras que a veces se da demasiado desarrollo a la Trigonometría. En muchos gimnasios, se descuida el estudio del prismatoide, cuya fórmula del volumen da lugar a generalizaciones notables, Por otra parte, sería de desear que se hiciera un corto estudio sintético de las secciones cónicas, partiendo del cono de revolución, colocándolo antes del estudio analítico.

En cuanto a la preparación del cuerpo enseñante, varía de un cantón a otro: lo mismo ocurre con las exigencias del Estado, que no siempre son suficientemente elevadas. La organización de los estudios para los candidatos a la enseñanza es todavía insuficiente tanto en las universidades como en la Escuela Politécnica Federal. Bajo este aspecto convendría examinar con cuidado los consejos que se exponen en el informe de los profesores Klein y Gutzmer (Dresde 1907) (1).

Esta diversidad de preparación es quizá una fuerza estimulante, pues el cuerpo enseñante, en su conjunto, está a la altura de su misión. Hay conciencia de que la enseñanza matemática es perfectible. Así es que sigue con el mayor interés las discusiones y los esfuerzos que se hacen en los países vecinos.

(1) Publicado en L'enseignement mathematique, 1908.

III

LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA

(Por H. Fehr profesor de la Universidad de Ginebra).

Entre las diferentes ramas de las matemáticas elementales, la Trigonometría es ciertamente la que más fácilmente se presta a las exigencias que resultan de la naturaleza misma de la enseñanza secundaria. En casi todos los países, la Trigonometría está en el número de las materias de estudio de los liceos, gimnasios o colegios. En Francia, sin embargo, no figura en el plan de la enseñanza clásica, mientras que ocupa un lugar quizá exagerado en las clases de matemáticas elementales y de matemácas especiales.

Es que puede concebirse ese estudio de diversas maneras. Con algunas lecciones puede iniciarse a los alumnos en la resolución de los triángulos. Puede también presentarse la Trigonometría como «una ciencia puramente « artificial, sin cuerpo, sin doctrina, y fabricada única- « mente para las necesidades de la enseñanza y de una « enseñanza poco racional». (1)

Para el alumno, la enseñanza de la Trigonometría se presenta en un momento en que, poseyendo ya las primeras nociones de Geometría y de Algebra, tiene la curiosidad de nuevos estudios, estando al mismo tiempo preparado para emprenderlos. El primer deber del profesor es, pues, mantener esas buenas disposiciones y tratar de despertar cada vez mayor interés. Lo conseguirá si desde luego se esfuerza de hacer notar a los alumnos la laguna que viene a llenar la Trigonometría en los conocimientos precedentemente adquiridos, después de hacerles comprender el fin de ese estudio; y sobre todo se evita empezar por consideraciones de orden teórico cuyo sitio

(1) Laisant--La matemática: Filosofía, Enseñanza.

está al principio de un tratado o de un curso destinado a los iniciados. Ciertamente hay un conjunto de convenciones que son indispensables para la generalidad y el rigor de las demostraciones; pero ellas no deben ser presentadas sino cuando el alumno comprende la necesidad.

La Trigonometría, limitada a su objeto principal, es decir a la resolución de triángulos, debe seguir a la Geometría plana. Examinaremos aquí, a grandes rasgos, el programa a recorrer; según los establecimientos, ese programa podrá ser más o menos desarrollado.

La noción de semejanza permite definir muy simplemente las funciones trigonométricas. Generalmente el estudio se limita al principio al caso de un ángulo agudo, y esas funciones se presentan como *relaciones* de los lados de un triángulo rectángulo tomados dos a dos. De esa manera se hace destacar muy netamente que a cada ángulo corresponden seis números constantes: el seno, el coseno, la tanjente, la cotanjente, la secante y la cosecante. Después el empleo se limitará a las cuatro primeras funciones, que son las únicas de uso corriente. El alumno calculará él mismo esas relaciones para los casos más simples; después pasará al estudio de las relaciones fundamentales. Abordará después la resolución de los triángulos y las aplicaciones a los triángulos isócelas y a los polígonos regulares.

Los primeros cálculos deben hacerse únicamente por medio de las tablas trigonométricas. Debe, en efecto, renunciarse al principio al empleo de las tablas de logaritmos, y no hay ningún inconveniente en limitarse a ejemplos numéricos sencillos. Veáse, a este respecto, lo que dice Hoüel en sus interesantes *Observaciones sobre la enseñanza de la Trigonometría:* «El uso prematuro de los logaritmos « trigonométricos, en una enseñanza dirigida a jóvenes « aún poco expertos en la práctica del cálculo, sólo « puede retardar sus progresos en ese arte y cerrarles la « inteligencia. El mal es grave principalmente cuando se « pone en sus manos novicías las grandes tablas que sólo

« convienen a los prácticos ejercitados, y cuyo manejo « nada nuveo enseña, del punto de vista de la teoría, con « respecto al de las tablas de tres o cuatro decimales ». Debo agregar que esos consejos han sido seguidos en muchos establecimientos.

En lo que se refiere a las aplicaciones numéricas, es indispensable que, sobre todo al principio, los alumnos hagan la verificación de los resultados obtenidos recurriendo a una resolución gráfica; todo cálculo de triángulo debe ser acompañado de la figura dibujada a una conveniente escala. Es de lamentarse que este medio de contralor, tan simple y tan útil en Geometría, sea descuidado en muchos establecimientos; es así, que muchos alumnos acaban por creer que la regla graduada y el compás sólo tienen aplicación en las escuelas técnicas.

Una vez bien establecidas esas primeras nociones y aplicadas a numerosos ejercicios, sin dificultad se podrá abordar en generalización. Se mostrará como la introducción de dos ejes rectangulares, sobre los cuales se hace la elección de un sentido positivo, permite extender a un ángulo cualquiera las definiciones de las funciones trigonométricas, hasta entonces limitadas al caso de un ángulo agudo. La elección del signo que afecta a cada una de las funciones se impone así con mucha claridad.

Es aquí solamente que conviene recurrir a la consideración del círculo para el estudio de las funciones trigonométricas. En efecto, el alumno concibe entonces fácilmente que, para estudiar la variación de la función, es ventajoso conservar en la relación considerada un denominador constante.

Esta generalización de las primeras nociones puede hacerse de una manera más o menos completa según las clases. Puede ser muy restringida limitándola a las aplicaciones más elementales, mientras que, si se tiene en vista un estudio completo hay que presentarla en toda su generalidad comprendiendo las fórmulas de adición y sus aplicaciones.

Y lo mismo ocurre con respecto a la resolución de los triángulos oblicuángulos. El problema al principio debe ser tratado de la manera más simple posible sin el auxilio de las transformaciones que se introducen para facilitar la ejecución del cálculo, pero por las cuales la solución toma—para los alumnos—un carácter artificial. Si en seguida el tiempo y la preparación de los alumnos lo permiten, se completará ese estudio utilizando las simplificaciones más importantes. Sin embargo, con frecuencia se exagera el alcance de esas transformaciones que permiten hacer las fórmulas calculables por logaritmos, y puede decirse, como lo expresa Hoüel «que la mayor parte « de las veces la simplicidad aparente de los valores a los « cuales se llega no es más que un engaño y una ilusión « de óptica ».

Me limito a estas indicaciones generales respecto del programa de los elementos de Trigonometría, tal como conviene al plan de estudios de los establecimientos secundarios, sin examinar de más cerca el grado de desarrollo que comprende según la naturaleza de los establecimientos. Ese programa ya ha sido adoptado, en sus líneas generales, por muchas instituciones; pero es de desear que tenga su empleo mayor difusión. Quizá se le reproche su falta de unidad; así es que algunos profesores prefieren al principio proceder a un estudio completo de las funciones trigonométricas, a fin de tratar la resolución de los triángulos en un solo capítulo. Pero este procedimiento tiene el inconveniente de dejar a los alumnos demasiado tiempo en presencia de funciones cuya importancia no conciben todavía. Y ni un instante titubeamos en sacrificar la satisfacción de una unidad puramente lógica a la necesidad primordial de ganar y de mantener el interés de los alumnos poniéndolos desde el principio en condiciones de penetrar el sentido de la materia enseñada.

Por otra parte, todo depende de la manera de presentar las primeras nociones. Los detalles que comprende el plan del curso deben dejarse a la apreciación personal

del profesor. Cuanto más iniciativa tenga éste en la aplicación del programa que se le impone, más animada será la enseñanza; pero además se necesita que se le *deje* esa iniciativa.

Con el desarrollo tan considerable que toman las ciencias y sus aplicaciones, se impone cada vez más la necesidad de una enseñanza matemática racional. Los conocimientos generales que la vida moderna exige actualmente de los jóvenes y cuyo estudio aumenta cada año, comprenden, entre otros, una educación matemática muy sólida. Si se quiere que los alumnos retengan algo de las nociones fundamentales adquiridas durante sus estudios secundarios, es preciso presentar esas nociones de la manera más propia para hacer resaltar su valor esencial y, si conviene sin duda mostrar el desarrollo que ellas pueden recibir del punto de vista de la ciencia pura, importa también no perder el contacto con la ciencia aplicada. Basta para ésto acompañar los ejemplos teóricos con algunos de los problemas que suministra el vasto campo de las aplicaciones prácticas (Física, Cosmografía, Topografía, etc). Sin caer en un exagerado utilitarismo, y conservando un carácter filosófico, la enseñanza matemática debe entrar más íntimamente en contacto con la vida moderna.

De este punto de vista, la Trigonometría desempeña precisamente un rol importante en las matemáticas elementales: despojada de la forma dogmática que se le da algunas veces desde las primeras lecciones, ella completa los elementos de Geometría y de Algebra con los cuales forma un primer ciclo de estudios; prepara al mismo tiempo para los métodos generales de la Geometría analítica; por otra parte ella constituye un lazo natural entre la ciencia abstracta y las aplicaciones técnicas.

IV

LAS LECCIONES DE INTRODUCCIÓN Y LAS LECCIONES DE REVISIÓN EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA SUPERIOR

Por el Dr. H. Fehr, profesor de la Universidad de Ginebra — (1)

Con frecuencia se hace a la enseñanza secundaria el reproche de que carece de profundidad y de que concede demasiada importancia a las cuestiones de detalle, a expensas de los conocimientos generales. Los alumnos adquieren, o más bien absorben con gran trabajo, una gran cantidad de nociones fragmentarias, pero ignoran casi totalmente las ideas directrices a las que esas nociones vienen a relacionarse. Así, ¿qué conocimientos quedan en la mayor parte de ellos cuando salen de las escuelas secundarias? Conocimientos muy vagos, y el recuerdo preciso de haber trabajado mucho. Se comprueba actualmente este hecho en la mayoría de los alumnos que limitan sus estudios al bachillerato.

Si esta observación se aplica a la vez al conjunto de las materías de estudio, los deficíts que se observan varían con las materias y los establecimientos. Las causas son de orden muy diverso; más son debidas a la organización de la enseñanza y al método empleado por el profesor, que a la dificultad que pueden ofrecer las materias enseñadas.

En las clases elementales, profesores y alumnos son víctimas de la organización de los estudios y del sistema de los exámenes, con esta diferencia sin embargo, que sólo alumnos son víctimas inconscientes, a lo menos en cierta medida. El profesor se esfuerza en llenar los menores detalles del programa que se le ha impuesto, mientras que los alumnos toman desde el principio la costumbre de trabajar sin reflexionar, sin tratar de descubrir las ideas generales. Su fin exclusivo es obtener aprobación en los exámenes.

(1) Artículo publicado en «L' enseignement mathématique», 1901.

Esos defectos son mucho menos sensibles en los establecimientos que dejan al profesor la libertad necesaria para dar a su enseñanza una forma personal. Pero, en mucbas instituciones, esta libertad es restringida por la existencia de los programas *detallados*, cuando éstos son impuestos al profesor. Cierto es que tales programa, con frecuencia acompañados de indicaciones relativas al método que debe seguirse, de ningún modo son testimonios de confianza otorgados a los profesores. Cuando más, ofrecen el grave inconveniente de quitar a estos últimos la posibidad de dar prueba de iniciativa y de contribuir al progreso de la enseñanza sacando provecho de la experiencia que han adquirido.

Cualesquiera que sean los programas y los textos impuestos por la autoridad escolar, jamás debe olvidar el profesor que todas las materias de la enseñanza secundaria deben contribuir a desarrollar en los alumnos la facultad de atención y darles el hábito de estudiar de una manera racional. Debe esforzarse en poner en evidencia las ideas fundamentales y demostrar las diversas formas bajo las cuales son aplicadas. A este respecto, algunas observaciones hechas durante el curso serán de alguna utilidad. Pero, es además indispensable que el profesor, de tiempo en tiempo, consagre una lección al estudio de cuestiones generales que abracen a la vez varios capítulos, estudio en que puede abordar, sea el aspecto filosófico del tema, sea el desarrollo histórico.

Es sobre las *lecciones generales*, comprendiendo a la vez las *lecciones de introducción* y las *lecciones de revisión*, que deberemos atraer la atención de los profesores de la enseñanza secundaria. En la enseñanza matemática sobre todo, hay un estudio de iniciación en la rama que se aborde; después, pasados un conjunto de capítulos, o al fin del curso, un estudio de coordinación en el cual la personalidad del profesor desempeña un rol capital. En su obra «*La matemática; filosofía; enseñanza*» Laisant ha hecho destacar la importancia de esas lecciones, pero no podría

insistirse bastante sobre su utilidad del punto de vista pedagógico; asi volveré sobre esta cuestión para desarrollar algunos de sus puntos.

Las *lecciones de introducción* son de uso bastante difundido, tanto en la enseñanza secundaria como en la superior, y debe esperarse que ellas se difundan cada vez más. Permitirán al profesor esquizar a grandes rasgos las cuestiones que va a desarrollar, indicando las nociones que sirven de punto de partida, las propiedades fundamentales y las aplicaciones a las cuales ellas conducen. Su fin es despertar en los alumnos el interés por las teorías que van a abordar. Sin embargo, este fin sólo podrá ser alcanzado si el profesor está bien informado sobre el nivel de los conocimientos de sus alumnos. Es en las nociones que les son familiares que debe buscar los puntos de contacto de las teorías que va a exponer. Con frecuencia bastará partir de algunos problemas simples, pero, escogidos de manera que pongan en evidencia las lagunas que quedan por llenar. No hay porque decir que esas lecciones deben revestir un carácter de gran simplicidad.

Las *lecciones de revisión* se hacen generalmente en la enseñanza secundaria; pero casi siempre son revisiones en el sentido estrecho de la palabra: repetición pura y simple de las reglas o de teoremas, trabajo necesario hecho únicamente en vista de los exámenes. *Para que las lecciones de revisión sean de utilidad real, basta que ellas aporten consideraciones nuevas,* es preciso que ellas ofrezcan el carácter de una *lección general.* La preparación para los exámenes, puesto que hay exámenes, no dejará de mejorar, y el fin que persigue la enseñanza secundaria será mejor alcanzado.

Esas lecciones generales se limitarán al estudio de las nociones fundamentales y de sus consecuencias inmediatas. Se llamará la atención de los alumnos sobre la formas, con frecuencia muy diversas en apariencia, bajo las cuales una misma propiedad ha sido utilizada; se harán destacar los lazos que existen entre los diversos capítulos,

así como los puntos de contacto que unen la teoría estudiada a otras ramas de la ciencia. Esto motivará, además, que se pase en revista las aplicaciones más importantes y que se insista sobre los métodos de resolución a que puede recurrirse.

Este trabajo de revisión no debe ser relegado a las úlmas lecciones. Revisiones parciales pueden tener lugar durante el año, después de un conjunto de capítulos. Para muchos alumnos, serán cada vez una fuente de estímulos; a los alumnos adelantados les permitirán entrever nuevos horizontes, y, como Tannery, diremos que «una «observación hecha de paso, puede considerarse como «una ventana abierta sobre el infinito de la ciencia».

Son esas consideraciones generales, hechas con motivo de una revisión, que dan a la enseñanza secundaría *superior* la profundidad que de derecho puede exigirsele. En cierto modo, forman el coronamiento de los estudios secundarios. En este período de sus estudios, es de toda necesidad que los alumnos presten atención a las ideas generales que les servirán de guía en los estudios ulteriores. Es en ese momento que en ellos puede desarrollarse la facultad de abstraer y de generalizar y darles hábitos de estudio racional. Agregaremos, sin embargo, que en esas nociones que, en las clases elementales, deben limitarse a indicaciones muy sumarias, el profesor debe obrar con mucha prudencia y evitar, en todos los casos, hacer gala de erudición.

Junto a esas consideraciones de carácter filosófico, las lecciones generales deben contener algunas indicaciones referentes al *desarrollo histórico* de la materia estudiada. El estudio de cada materia debería determinarse por cortas nociones históricas presentadas bajo la forma de una simple conversación y limitada a los hechos mas culminantes. Las cuestiones históricas siempre interesan vivamente a los alumnos; ellos desean saber cuales eran los medios de cálculo de que se servían los antiguos, a que época remonta el uso de las fracciones decimales, cómo

han sido introducidas las relaciones trigonométricas en los cálculos, etc., etc. El considerable desarrollo que desde hace unos 20 años, han tomado las investigaciones sobre la Historia de las matemáticas, ha dado lugar a numerosas publicaciones; actualmente existe una serie de textos de Aritmética, de Algebra, de Geometría y de Trigonometría que contienen un capítulo, o simplemente algunas notas, sobre la Historia de las matemáticas. Es, pues, fácil para el profesor completar sus conocimientos en ese dominio a fin de sacar partido de su enseñanza.

En apoyo de lo que precede, debemos señalar una feliz tentativa hecha por Hadamard en sus *Lecciones de Geometría elemental*. La obra termina con una Nota en la cual el autor presenta, bajo una forma muy simple, los primeros principios del método matemático. Esta nota ya ha sido señalada en esta *Revista* (año 1899) por Tannery en un interesante artículo titulado «*Sobre el método en Geometría, según Hadamard*». Destinada a la vez a los profesores y a los alumnos, está llamada a ejercer una excelente influencia sobre la enseñanza. La recomendamos a todos los que, como nosotros, creen que la enseñanza de la Geometría elemental debe contribuir a desarrollar en los alumnos las facultades de atención y de razonamiento y darles esa vigilancia de la inteligencia que les es indispensable en los estudios superiores.

V

DEL ROL QUE PUEDE DESEMPEÑAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN INTELECTUAL DE LOS ESTUDIANTES.

Por el profesor H. Roorda de Lausanne — (1)

Una comisión compuesta de veinte profesores de la Escuela politécnica federal ha presentado, hace algunos me-

(1) Informe leído el 8 Octubre 1916 en Baden en la reunión anual de la Sociedad Suiza de los profesores de matemáticas.

ses, al Consejo Superior de esa Escuela un informe en el cual debía indicar algunos medios apropiados para mejorar la *cultura general de la educación nacional* de los estudiantes suizos, de aquellos, en particular, que hacen estudios científicos.

En una de sus conclusiones, los firmantes del informe proponen «aligerar los programas de las escuelas medias reduciendo parte de lo reservado a las *ciencias exactas especiales* en provecho de la lengua materna, de las lenguas nacionales, de la historia y de la geografía».

La comisión propone también tomar en consideración la petición de la Sociedad Suiza de los profesores de Geografía «tendiente a reforzar la enseñanza de la Geografía, y de unir con ese fin la Geografía a la Historia, como materia de examen para el ingreso en la Escuela Politécnica Federal».

Se expresa, en fin, que las matemáticas y las ciencias naturales absorben el tiempo de los alumnos de nuestras escuelas secundarias científicas al punto de hacerles descuidar su cultura general.

Es ese informe, señores, (que no tengo la pretensión de resumir), que ha sugerido a uno de los miembros de nuestro Comité la idea de proponeros hoy, como tema de discusión, *el rol que puede desempeñar la enseñanza de las matemáticas en la formación del espíritu del estudiante.*

Antes de abordar esta cuestión, debo recordar uno de los carácteres esenciales de nuestras escuelas secundarias y, principalmente, precisan el sentido de esta expresión tan frecuentemente empleada: *la cultura general.*

Aunque las escuelas secundarias se ofrecen a un público mas restringido que las escuelas primarias, los profesores que en éstas enseñan se dirigen a alumnos que después deben ejercer las profesiones más diversas. Por ejemplo, en los gimnasios clásicos, a pesar de los filtros anteriores, las mismas lecciones se dan a futuros médicos, a futuros pastores, a futuros abogados, a futuros ingenieros, a futuros pedagogistas, a futuros químicos; y mi lista

no es completa. Es necesario pues, que la enseñanza tenga un valor muy general si se quiere que todos los que la reciben saquen de ella un provecho real. Parece haberse comprendido bien, puesto que es una *cultura general* que se dice querer dar a los alumnos de nuestros colegios y de nuestras gimnasios.

¿En qué consiste esa cultura? En esto estriba toda la cuestión. He buscado la palabra *cultivar* en mi *Larousse*, y he encontrado esta definición: *Hacer trabajos apropiados para hacer fértil la tierra.*

Por analogía puede decirse que cultivar una inteligencia, es someterla a un régimen que hará fructificar sus riquezas naturales. Y, en efecto, es posible desarrollar por medio de una gimnasia regular las aptitudes precisas que todos los niños poseen. Lo que varía mucho de uno a otro es la medida de los progresos realizables.

Los estudiantes beneficiarán, pues, de una cultura general si dedicándose a los diversos modos de actividad que se les propone, aumentan sus fuerzas físicas, morales e intelectuales y mejoran así lo que la naturaleza les ha dado de bueno.

En realidad, la *cultura general* que la Escuela se esfuerza en dar a todos sus alumnos es una cultura mucho más superficial. Es otra cosa. Consiste en un conjunto de nociones morales, filosóficas, literarias, históricas y científicas que, más o menos, pueden ser las mismas en personas que sensiblemente difieran las unas de las otras por las cualidades del espíritu.

Se perfectamente, señores, que caería en un engaño ridículo si, entre esas dos maneras de entender la cultura general, quisiera ver una oposición absoluta. Entre esos dos términos extremos pueden imaginarse términos intermedios. Además, es probable que aplicándose a adornar las inteligencias se acabe por modificar un poco la calidad. Pero tengo razón al afirmar que, en general, por la fuerza de los hechos, el profesor se aplica más a comunicar a sus alumnos sus propios conocimientos y su pro-

pia habilidad, que a mejorar todo lo que hay de perfeccionable en ellos.

No creo haberme separado de mi tema haciendo estas observaciones preliminares. Pues si queremos dar a los alumnos esa cultura general, que a la larga resulta de la gimnasia fortificante de la cual he dicho algunas palabras, comprenderemos que la *manera* de enseñar importa más que la *materia* de enseñanza. Cierto es que a propósito de sus trabajos manuales, por ejemplo, puede inculcarse a un niño ideas generales, claras y justas sobre las condiciones antiguas o actuales de la actividad humana en la superficie del globo. Y, por lo contrario, un profesor de latín, de historia o de geografía hará que sus lecciones sean áridas, fastidiosas e inútiles si expone indiscretamente su erudición o si no sabe escoger los hechos significativos e interesantes.

Juzgados del punto de vista en que me coloco, las mejores lecciones son aquellas en que el alumno se interesa vivamente, aquellas en que su inteligencia es *activa*. Me parece que debemos colocarnos en este punto de vista. En efecto nuestra responsabilidad hacia el niño es grande; pues la escuela le priva de su libertad durante varios años, y esto, en algunos días, desde la mañana hasta la noche. Debemos, pues, suministrarle la ocasión de acrecer por el ejercicio sus aptitudes naturales. No haciéndolo así nos exponemos a tomarle más de lo que le damos. Y bien, puesto que se trata ante todo de formar su juicio y de disciplinar su lógica, de acrecer su vigor intelectual y de afinar su inteligencia no podemos hacer dos categorías de las ramas de la enseñanza: las que dan al alumno estudioso una *cultura general* y las que no tienen esta virtud. La distinción que algunos profesores se apresuran a hacer en su provecho entre unas y otras no tienen fundamento. ¿No es evidente, por ejemplo, que se podrá decir tanto bien, de todos puntos de vista, de las ciencias naturales que de la geografía?

De todo esto resulta que las matemáticas de las que

voy a ocuparme en seguida, tendrán o no tendrán un valor educativo general, que serán o no serán fortificantes para la inteligencia de los alumnos, según que se enseñen de tal manera o de tal otra.

Pero, ved una razón que debe impedirnos acordar a todas las materias de enseñanza rasgos igualmente importantes en los programas escolares.

Hay enseñanzas que, ante todo, tienen por fin desarrollar en el alumno cierta *habilidad*. Por ejemplo, se querrá que llegue a ser hábil en el empleo de su lengua materna, o en el empleo de una lengua extranjera. Igualmente recibe lecciones por las cuales se trata de hacerlo un hábil calculador, un hábil dibujante o un hábil gimnasta. Esa habilidad sólo se adquiere después de mucho tiempo, gracias a un entrenamiento regular. Importa, pues, que esas lecciones por las que, en defecto de virtuosidad, el alumno debe adquirir facilidad y destreza sean frecuentes. Valdría más que fueran cotidianas y de corta duración que largas y espaciadas.

Hay, por otra parte, lecciones de las cuales absolutamente no puede decirse lo mismo. Si, por ejemplo, se enseña historia a los niños no es para que a los 16 años los más estudiosos sean hábiles historiadores. A los 16 años no se sabe todavía lo que es la vida de un hombre; no se sabe por experiencia, lo que hace difícil la lucha por la existencia; y sobre los pueblos y los individuos sólo puede hacer juicios candorosos. Si su actividad intelectual no se detiene, las ideas generales que un alumno puede tener en materia de historia se transformarán profundamente. En cambio, puede tener en gramática o en matemáticas elementales nociones esenciales, justas y *definitivas*.

Las lecciones de historia que se da a nuestros alumnos no pueden ser exclusivamente científicas. En esas lecciones, tiene frecuentemente preocupaciones de orden moral. Quiere hacer reflexionar a sus alumnos sobre la conducta humana; y, para ésto, no teme conmoverlos y herir su imaginación.

Del mismo modo los profesores de geografía no se esfuerzan solamente en aumentar la erudición del alumno. Nos han dicho qne su enseñanza puede tener un carácter moral y filosófico bastante acentuado para iluminar y mejorar el civismo de los futuros ciudadanos. Ahora, no es evidente que por medio de numerosas y monótonas monografías y por largas listas de nombres geográficos ensayen de alcanzar ese fin. Son los hechos típicos e impresionantes los que hacen reflexionar. Una sola historia conmovedora que se fija de una manera indeleble en la memoria del niño tiene más importancia para su desarrollo intelectual y moral que centenares de hechos que aprenda con resignación. Breve; puesto que en las lecciones de historia y de geografía, por ejemplo, no se trata de una técnica indispensable de adquirir, es la cualidad de esas lecciones, mucho más que su gran número, lo que constituye su valor y las hace eficaces.

Contando con vuestra indulgencia, señores, me atrevo a agregar una última palabra a esta introducción, que ya es larga, pero que me permitirá hablar con más claridad de la enseñanza de las matemáticas.

Para justificar la distinción que acabo de hacer entre dos géneros de lecciones, podría también decir que, en unas las lagunas que se dejan en el saber del alumno son más graves que en otras; es decir que, para el profesor, importa mucho menos en éstas que en aquéllas ser completo. Sería muy fácil demostrar por medio de ejemplos que en materia de literatura, de historia, de geografía, de ciencias naturales, y también de matemáticas, hay lagunas que no perjudican los estudios ulteriores, lagunas que, por otra parte, pueden llenarse, no importa cuando, en cinco minutos, y cuya gravedad se ha exagerado. Pero, si un joven se expresa difícilmente, o si tiene una mala ortografía, o si no sabe calcular correctamente, o si es incapaz de ejecutar un cróquis, siquiera aproximado, o si el mejor de sus trazos es absolutamente insuficiente, no adquirirá esas aptitudes que le faltan, ni en algunas horas, ni en algunos días.

Las monografías demasiado numerosas, las nomenclaturas demasiado completas, las listas de nombres demasiado largas: he ahí lo que exige en la enseñanza un tiempo considerable, tiempo perdido para la cultura general del alumno.

Y ahora, hablemos de las matemáticas, de las cuales hablaré muy favorablemente. Pero es entendido que sólo consideraré el caso en que ellas son estudiadas en buenas condiciones; pues el hecho es que algunos alumnos siguen durante dos o tres años, con fastidio y disgusto, cursos de álgebra o de geometría de los que aquí no sacan ningún provecho. Además, hemos encontrado adultos que, hablando de matemáticas, declaran sin reparo que de ellas no han comprendido casi nada. Y son con frecuencia personas muy inteligentes. ¿Cómo conciliar este hecho con la gran simplicidad de las matemáticas elementales, simplicidad de que me ocuparé de inmediato?

El ilustre matemático Blas Pascal, sin quererlo, nos ha hecho mucho mal el día en que opuso el *espíritu geométrico* al *espíritu de fineza.* Personas que han oído hablar de esta distinción clásica se imaginan que tienen un espíritu fino porque nada comprenden de geometría. Es muy criticable esta manera de interpretar los textos. Esas lógicas audaces olvidan el caso en que no se posea ni el espíritu de la geometría, ni el otro,—caso bastante frecuente. La verdad es, que un geómetra de talento tiene necesariamente fineza de inteligencia; y por otra parte no se puede ser un espíritu fino, si se es incapaz de comprender la geometría.

El razonamiento ocupa en la vida de nuestra inteligencia un sitio mucho más grande de lo que se cree. En efecto, es un razonamiento muy rápido, del cual apenas tenemos conciencia, que frecuentemente precede el juicio que hacemos sobre los seres o sobre las cosas. ¡Y bien¡ las matemáticas habituan a ver claro en los razonamientos que hacemos. Cualquiera que sea la naturaleza de las cuestiones que abordemos, estas, para nosotros, difieren

más por su grado de complejidad que por las facultades de nuestra inteligencia que van a poner en actividad; y lo que también varía, de un caso a otro, es el grado de convicción con que formulamos la respuesta. De ordinario, en matemáticas, se resuelven problemas en que el número de los datos es suficiente y en que se sabe de qué manera la incógnita depende de cada dato. Este caso favorable no se presenta con frecuencia en las cuestiones de la biología y casi nunca se trata de prever la conducta de los individuos o de las multitudes. Un hombre inteligente, sea geómetra o no, sabe, pues, si lo que afirma es cierto, o muy probable, o solamente probable, o posible, o improbable; y también comprenderá, en ciertos casos, que se encuentra ante un problema absolutamente indeterminado.

Véase, por otra parte, lo que con frecuencia puede hacer creer en una diferencia esencial entre el espíritu de fineza y el espíritu geométrico.

Para exponer o para resolver una cuestión cualquiera de una manera inteligente, es preciso desde luego tener la ocasión y la voluntad de ocuparse de ella. Hay que empezar por interesarse en ella. Un mundano, por ejemplo, que ha pasado millares de horas en los salones hablará de las manifestaciones de la coquetería femenina más finamente, sin duda, que un matemático de genio que casi siempre ha vivido en el mundo de las ecuaciones. Pero esto no demuestra que aquel posea en mayor grado el espíritu de fineza que el austero sabio. Para prever la manera de proceder de tal coqueta en tales precisas circunstancias, uno de esos hombres que desde mucho tiempo atrás ha hecho observaciones sobre las mujeres, posee datos que faltan al otro. Por otra parte, cuando realmente lo quiera, nuestro matemático podrá comprobar, en la actitud o en el lenguaje de las que observe, la frecuencia más o menos grande de ciertos gestos, de ciertas sonrisas, de ciertas expresiones y de ciertas palabras. En ese nuevo dominio, simples números podrán ser para

él índices psicológicos de real valor. Pues un sabio no es necesariamente un imbécil.

En fin, lo que a veces puede hacer creer en la mayor fineza de los que han preferido los estudios literarios a los estudios matemáticos, es que algunos de ellos poseen una notable virtuosidad en el empleo del vocabulario. Pero antes de atribuirles un espíritu muy fino, debe estarse bien seguros de que, con palabras brillantes, no digan cosas absurdas o triviales.

Esas observaciones muy incompletas no bastan para demostrar que el espíritu de fineza y el espíritu geométrico son absolutamente de la misma naturaleza. Me conformo con denunciar la exageración de otras personas. Pero, no creáis, señores, que he querido solapadamente alargar todavía mi introducción. Estoy por completo en mi tema. Pues si era verdad que para estudiar con provecho los problemas de la literatura, de la historia, de la política y de la moral se debe poseer esas mismas facultades intelectuales fundamentales que en si se pueden desarrollar estudiando las matemáticas, de ello podríamos deducir que las cuestiones del álgebra y de la geometría no se distinguen de las otras sino por una mayor simplicidad y que tales cuestiones son, pues, particularmente propias a ejercitar la inteligencia del niño. En otros términos, podríamos decir que el espíritu geométrico no es más que el espíritu de fineza aplicado a las cuestiones que se pueden resolver con certeza.

Una última palabra a este respecto. Si se habla con un poco de desdén del espíritu geométrico es, algunas veces, porque se ha encontrado geómetras que tratan ciertas cuestiones complejas como si ellas fueran simples. Podría deducirse que tales geómetras no son muy inteligentes Pero lo son tanto como esas personas cultivadas que creen tener un espíritu fino y que quedan confundidas ante los problemas elementales de la aritmética, como si tales problemas fueran realmente difíciles. En cuanto a mí, encuentro inquietante la audacia de esas personas que, in-

capaces de formarse una idea clara de la adición de dos fracciones o de la extracción de una raíz cuadrada, resuelven con seguridad las cuestiones sociales o morales más complicadas.

He hablado de la gran simplicidad de las matemáticas. ¿Es real esta simplicidad? Es lo que voy a tratar de demostrar. Si tantas personas afirman lo contrario, se debe a razones que indicaré al fin de este informe.

Estudiando las matemáticas sólo se consideran magnítudes geométricas y números. Y cualesquiera que sean los números que se consideran, todo se reduce a la consideración de los números *enteros*. Ahora, una fila de puntos señalados en una hoja de papel constituye una imagen absolutamente clara de un número entero. Basta agrupar o subdividir algunas de esas filas de puntos para descubrir todas las propiedades de la adición, de la substracción, de la multiplicación y de la división. Por el mismo medio fácil se adquirirán ideas justas sobre la raíz cuadrada. Y cada nueva regla será la expresión de este hecho, que cambiando el modo de agrupación de los puntos que se tiene a la vista no varía su número. En fin, el cuadro de puntos que representa, por ejemplo, el producto *cinco veces ocho*, es absolutamente análogo al que representa el producto de otros dos números enteros. Quiero decir, que en el dominio de la aritmética un caso particular se parece tanto a otro caso particular que basta considerar atentamente uno para enunciar con convicción una regla que a todos se aplica. No existe otro dominio en que la generalización de los resultados observados se haga con tanta seguridad y tanta facilidad.

En cuanto a las nociones fundamentales de la geometría, ya las poseemos instintivamente, de una manera confusa, antes de haber recibido una lección propiamente dicha. Es como una ciencia que duerme en nuestra inteligencia y que despertará el profesor con algunas palabras. Los movimientos y la simetría de su propio cuerpo, verosímilmente, han sugerido al hombre esas ideas sim-

ples que al coordinarse han constituído la geometría elemental.

Podría citar numerosos hechos que confirman esta hipótesis; pero, para vosotros, señores, serían supérfluos.

En fin, un niño imaginará él mismo algunas de las identidades fundamentales del álgebra elemental ensayando de hacer más fácil el cálculo mental que se le ha propuesto.

Del hecho de que el matemático no se ocupa más que de *abstracciones*, algunos cándidos deducen que el estudio de las matemáticas es difícil. Ahora, la abstracción es una operación automática y espontánea del espíritu que se efectúa tanto en los cerebros más groseros como en los demás. Algunos filósofos han pretendido que círculos imperfectos, los únicos que podemos observar a nuestro alrededor, no podrán dar al hombre idea del círculo perfecto. Se engañan, pues no tenemos vista bastante perfecta para percibir las pequeñas irregularidades de tal círculo que miremos, como el disco de la luna, por ejemplo; y así, cuando percibimos ese círculo imperfecto, es la idea del círculo perfecto la primera que se ofrece a nuestra inteligencia. Quiero decir, que es la imperfección de nuestros sentidos la que constantemente nos hace hacer abstracción de la mayor parte de los caracteres de la realidad. Y necesitamos años para corregir y completar las ideas demasiado simples, demasiado abstractas de nuestra infancia.

Repito que más adelante hablaré de lo que ordinariamenta hace difícil el estudio de las matemáticas. El hecho es que el alumno que estudia las matemáticas elementales se ocupa de cosas muy simples, bastante simples para que él pueda, si nada viene a turbarle o a distraerle, hacerse de ellas una idea *absolutamente clara*. Y, como voy a demostrarlo, esto puede tener una importancia fundamental del punto de vista de su educación.

Un principiante puede estudiar el álgebra y la geometría muchos años seguidos de modo que no encuentre más que verdades evidentes, o casi evidentes. Sé perfecta-

mente que nuestros alumnos no tienen esa suerte; pero, por el momento, la cuestión no es esa. Este carácter de evidencia, de las relaciones que descubrimos entre los números, o entre las figuras geométricas, da a nuestra convicción toda su fuerza y nos permite ser afirmativos con perfecta seguridad. Nos sentimos capaces de convencer al contradictor que se presente. Ahora, sea dicho al pasar, es bueno que el niño, que necesita optimismo y confianza, sepa que hay cuestiones sobre las cuales el acuerdo de todas las inteligencias puede hacerse fácilmente.

Digo que no hay dominio en que la distinción entre lo *verdadero* y lo *falso* sea tan fácil de hacer como en matemáticas. Las afirmaciones del matemático son fácilmente contraloreables. Así, para trabajar con éxito, se debe tener una perfecta probidad intelectual. Si hay falta de atención o de escrúpulos, constantemente se está expuesto a decisivos desmentidos.

De este punto de vista el matemático es un privilegiado. Sabéis muy bien, señores, que todos los geógrafos no siempre pueden ponerse de acuerdo: ni los historiadarios, ni los filósofos, ni los moralistas. A veces se ha visto pensadores, deseosos de mostrar su ingeniosidad o su genio, aportar soluciones fantásticas a problemas muy complejos, desprovistos de todo valor científico. Y les ocurre dar su nombre a una ley natural cuya fragilidad sólo aparecerá después de 20 o 30 años de pacientes observaciones. No es tan fácil ser original en matemáticas.

Otra cosa. En matemáticas, más que fuera de ellas, se siente con más intensidad la necesidad de ser atentos a lo que se lee y a lo que se escribe. Por ejemplo, cuando se resuelven ecuaciones, un momento de desatención de medio segundo basta para que se llegue a un resultado absolutamente falso y para que el trabajo, quizá muy largo, que se ha terminado resulte sin ningún valor. Ahora, no puede ciertamente decirse la misma cosa de una composición literaria, en la cual, por otra parte, el error cometido aturdidamente será corregido con más prontitud,

Efectuar transformaciones aritméticas o algebraicas, durante cincuenta o sesenta minutos, con una atención sostenida, significa un esfuerzo muy serio. Pero, en muchos casos, el cumplimiento de este esfuerzo prolongado constituirá una condición suficiente para que el trabajo ejecutado sea absolutamente bueno. Los ejercicios a que me refiero tendrán, pues, una influencia moralizadora sobre el alumno, puesto que, haciéndolos, él comprende que el éxito de su empresa únicamente depende de su perseverancia, de su voluntad. Hay muchos dominios en que la recompensa del trabajo empeñoso es menos cierta.

Hay lecciones en que el alumno está reducido a repetir lo que se le ha enseñado, sin poder contralorear la exactitud de las proposiciones que enunció. Pero, en matemáticas se le puede acostumbrar a preguntarse constantemente: ¿Tengo el derecho de afirmar ésto? Sería para él muy buena costumbre.

He dicho que, al estudiar la ciencia de los números, el niño encuentra cuestiones que para él pueden llegar a ser absolutamente claras, lo que permite, cuando las resuelve, ser firmemente afirmativo. Pero, precisamente porque habrá examinado muchos casos en que se puede afirmar con certeza, será capaz de reconocer los casos en que eso ya no sea posible. No encontrando ya en los problemas de otro orden la claridad a que se ha habituado, más que nadie sentirá la necesidad de suspender su juicio. Mejor que a otra persona se le podrá hacer comprender que tal cuestión admite soluciones diferentes según que se acuerde mayor o menor importancia a estos datos o a aquéllos. La diversidad de las opiniones en el dominio de la moral, de la filosofía y de la política no le extrañará y se inclinará a la tolerancia. Se perfectamente que en la vida, ante los problemas indeterminados, no puede suspenderse indefinidamente un juicio: es preciso saber optar y tomar resolución. Pero puede hacerse sin ceguedad. Conviene que las cuestiones que voluntariamente simplificamos, por razones de orden prác-

tico o sentimental, conserven toda su complejidad para nuestra inteligencia.

Evidentemente existen geómetras poco inteligentes que afirman a diestro y siniestro, lo mismo que existen moralistas ineptos e historiadores sin clarividencia. Pero no es el estudio de la geometría que desarrolla en nosotros la tendencia a afirmar sin precaución. Por lo contrario, en matemáticas se tiene constantemente la ocasión de medir con cuidado el grado de generalidad de la verdad y, con frecuencia, la obligación de introducir una restricción en el enunciado de un teorema.

A ese propósito debo hacer notar que el profesor de matemáticas puede ser un auxiliar precioso para su colega que enseña a los alumnos a servirse de su lengua materna. Supongamos, en efecto, que se pida a un alumno que defina una figura simple trazada sobre el pizarrón, por ejemplo: dos ángulos opuestos por el vértice, o bien un polígono de una especie particular. Si su definición es incorrecta, podrá trazarse en el pizarrón la figura que él ha definido mal, y hacerle comprender así que está equivocado. La impropiedad de los términos que ha empleado de inmediato le aparecerá de manifiesto. No hay porque decir que cualquiera que sea el dominio de una verdad que se formule con palabras mal elegidas puede transformarse en error. Pero, en el dominio de las matemáticas, mejor que en otro cualquiera, el alumno siente, inmediata y claramente, la necesidad de emplear un lenguaje preciso o aún, en muchos casos, sentirá esta necesidad sin que el profesor intervenga.

Esto me conduce a hablar de la entera libertad de espíritu con que el alumno puede estudiar las matemáticas. Quiero decir que se le pueden enseñar sin imponerle la menor docilidad intelectual. Sí en geometría se le indicaran los nombres de las figuras elementales, y en álgebra los signos abreviativos universalmente empleados, se podría, durante años, hacerle progresar rápidamente, tan sólo con suministrarle los enunciados de numerosos

problemas, graduados con mucho cuidado. Es claro que, en gramática, en historia, en geografía y en ciencias naturales no podría procederse de la misma manera. En particular en las lecciones en que se habla de cosas que son lejanas en el tiempo o en el espacio, el niño está reducido a creer lo que se le dice. Pero, en las lecciones de matemáticas, constantemente podría dársele la ocasión de reconocer que él dispone de medios naturales para descubrir la verdad sin auxilio de nadie. En esas lecciones él podría ser más activo que en muchas otras. Y siempre sería fácil, planteándole de tiempo en tiempo cuestiones dudosas, mantener en sabios límites la saludable confianza en ese poder suyo, de observar atentamente, de perseverar, de razonar y de verificar. Si uno de los fines esenciales de la educación es formar hombres que sepan pasarse de maestros, el estudio de las matemáticas puede ser tan educativo como cualquier otro.

Véase todavía una razón por la que conviene que los niños hagan ese estudio. Sin que yo insista sobre este punto, vosotros me creeréis, señores, si digo que los casos en que el lenguaje matemático es preferible al otro, son innumerables. En muchos de los dominios hay casos que pueden caracterizarse por medio de uno o de varios números mejor que con palabras. Los números y los signos del álgebra se encuentran en libros de todas clases. Simples números pueden informarnos sobre la situación de un punto, sobre la forma de una figura, sobre la pendiente de un camino, sobre la composición de una mezcla o de una aleación, sobre la altura de un sonido, sobre la potencia de una máquina, sobre el estado patológico de un enfermo, sobre la situación económica de un país, sobre las costumbres de un pueblo, y sobre muchas otras cosas. Y, por ejemplo, ¿no podría caracterizar algo el estilo de un escritor indicando la frecuencia más o menos grande, en sus escritos, de las palabras de tal o cual especie?

Apenas es necesario expresarlo: las matemáticas cons-

tituyen un instrumento de que se sirven los ingenieros, los físicos, los astrónomos, los hombres de negocios, los economistas, los estadistas, los geógrafos y muchas otras personas. ¿Y qué haría un filósofo que quisiera estudiar el mecanismo del razonamiento si no tuviera a su disposición los ejemplos que pueden suministrar el álgebra y la geometría? Se sabe, además, la categoría que ha sido acordada a las matemáticas por los pensadores que se han ocupado de la clasificación de las ciencias.

El número se encuentra en todas partes. Hemos podido comprobarlo cuando un adulto cultivado juzga útil disminuir su ignorancia en matemáticas, de ordinario encuentra, en el estudio que emprende, serias dificultades, desalentadoras a veces. En todo caso, progresa menos ligero de lo que quisiera. No sólo le falta el tiempo de que disponen los alumnos, sino ciertos hábitos de espíritu que son más necesarios cuando se emplea el lenguaje algebraico que cuando se habla la lengua de todo el mundo. Ahora, afirmo que un matemático se curará más rápidamente, con menores esfuerzos, por medio de libros atrayentes, de su ignorancia en literatura, en historia, en geografía o en ciencias naturales. Me atrevo a afirmar que el estudio de las matemáticas no es de aquellos que fácilmente pueden relegarse para más tarde. Más tarde el alumno podrá completar su erudición; pero, es mientras que el ser humano es joven que hay que ayudarle a perfeccionar el instrumento de trabajo que para él será su cerebro.

En fin, señores, no os sorprenderé al deciros que también debe ensayarse hacer amar las matemáticas por su belleza. En geometría analítica, por ejemplo, existe tan perfecta correspondencia entre las expresiones algebraicas y las magnitudes geométricas que los caracteres menos aparentes de una curva se revelan en las particularidades de su ecuación. Y, para concluir, citaré todavía este hecho; que un razonamiento simple y breve puede dar al matemático una certeza a la que no se llegaría

por observaciones pacientes, continuadas durante siglos. Por ejemplo, no es la experiencia que podría enseñarnos que la serie de los números primos es ilimitada. Por otra parte, me apresuro a agregar, pues nadie nos oye, que teoremas de ese género no permiten a la humanidad mejorar sensiblemente las condiciones de su existencia en la superficie terrestre.

He indicado, señores, algunas de las razones por las cuales, en mi opinión, deben enseñarse las matemáticas, regularmente, varios años seguidos, a los jóvenes cuya inteligencia se quiere disciplinar. Pero, como ya he dicho, dada de mala manera y en malas condiciones, esa enseñanza puede estar desprovista de todo valor educativo.

Bien entendido, hay muchas maneras de enseñar bien, y no tengo la ridícula pretensión de dar consejos a mis colegas. Es en mis propias lecciones que he comprobado la desproporción inquietante que existe entre los esfuerzos que hace el profesor y los resultados que obtiene. Pero tengo razones de creer que todos hemos tenido ocasión, más o menos frecuente, de sufrir sinceramente por nuestro parcial fracaso. Si no llego a descubrir las verdaderas causas, os ruego de darme vuestras luces sobre este punto.

No basta a un profesor, para tener el espíritu tranquilo, dar sus lecciones con mucho cuidado, ardor y paciencia. Desgraciadamente le falta tiempo. Hay alumnos, numerosos a veces, a los cuales debe inculcar, en un tiempo dado, la suma de los conocimientos previstos por el programa. Sus alumnos difieren mucho unos de otros por su celo y por la calidad de su inteligencia. Ahora, no debe solamente hacerles alcanzar a todos progresos continuos: es la misma dósis de ciencia que debe enseñar a los que progresan rápidamente y a los que progresan con lentitud. La naturaleza no se preocupa de las exigencias de la Escuela: y cuando hemos llegado a enseñar las

mismas fórmulas a un alumno limitado y a un alumno inteligente, debemos creer que hemos puesto la misma claridad en la inteligencia del uno y en la inteligencia del otro. Si pudieran ser profundamente sinceros, esos dos alumnos no emplearían las mismas palabras para decir lo que han aprendido y comprendido. Exigiendo demasiado pronto de un principiante que emplee las expresiones clásicas del profesor, ya no se está en condiciones de apreciar el grado exacto de sus conocimientos.

Quiero decir que hay demasiado apresuramiento en enseñar a los principiantes procedimientos expeditivos, razonamientos de forma impecable y fórmulas generales. Las cuestiones matemáticas serían mucho más fáciles, mucho más claras para el niño, si él tuviera el derecho, para empezar, de resolverlas a su manera, empleando los medios muy imperfectos que él mismo es capaz de imaginar. ¡Veamos! ¿Es acaso natural que un jóven alumno proceda como el que de antemano conoce los resultados que debe alcanzar o bien como cualquiera que busque, que no sabe todavía? Que se sea inteligente o no, cuando se aborda una cuestión nueva, se empieza por titubear y tantear, se hacen hipótesis, verificaciones, se reconocen los errores propios y se vuelve a empezar. Se dice a los alumnos cómo deben contestar, pero no se les enseña a buscar. Trazar figuras, observar, tantear, verificar: ved lo que nuestros alumnos deben hacer para comenzar. Es a la larga, y de un modo natural, que su lenguaje y su razonamiento mejorarán. Para ésto, bien entendido, se les ayudará; pero debieran esperarse sus progresos con menos impaciencia.

Acabo de hablar de figuras. Conviene que los alumnos jóvenes las utilicen con frecuencia. Basta, en muchos casos, representar la incógnita de un problema por un segmento rectilíneo o por la superficie de un rectángulo para que ese problema resulte fácil. Todo lo que puede decirse del producto de dos números o de dos binomios se hace evidente si se tiene a la vista el rectángulo cuyos

dos lados son medidos por los dos factores de ese producto.

Véase una experiencia que he hecho con frecuencia, que siempre ha tenido éxito y que me parece significativa. Propongo a mis nuevos alumnos que empiecen el estudio del álgebra y de la geometría, y que ya han estudiado la *regla de tres*, un problema de este género: *Si se aumentara en 5 centímetros el lado de un cuadrado, su superficie aumentaría en 865 centímetros cuadrados. ¿Cuánto aumentaría la superficie si el lado aumentara en 8 centímetros?*

La mayor parte de esos alumnos resuelven rápidamente el problema por la regla de tres y, bien entendido, me traen una respuesta inexacta. Por medio de una figura muy simple habrían reconocido que el incremento de la superficie no es proporcional al incremento del lado, y que la regla de tres no debe intervenir en la cuestión.

No hubieran sido engañados por la forma del enunciado si se les hubiera habituado más a observar, y si hubiera menos apresuramiento en enseñarles procedimientos expeditivos. Las reglas sólo tienen valor si se saben reconocer los casos en que ellas son aplicables; ellas sólo tienen un sentido completamente claro para el investigador del cual resumen las numerosas experiencias y observaciones.

Con mucha frecuencia el alumno se ocupa de matemáticas sin saber lo que hace. Porque el profesor está apurado, porque debe apresurar la instrucción de sus alumnos, les suministra medios perfeccionados antes que ellos se hayan formado una idea clara del fin que deben alcanzar. Ese fin lo alcanzarían con más seguridad si se les indicara la dirección en la que hay que marchar sin suministrarle el medio de locomoción que permite avanzar muy ligero. Aun a las personas más inteligentes les sucede que no encuentran de inmediato el procedimiento que permitiría resolver el problema propuesto. Pero no saber lo que se quiere, es ser incapaz de hacer un esfuerzo útil.

En clase, los profesores tratan habitualmente con mucho cuidado las cuestiones de detalle; pero muchos, parece, no insisten sobre la significación de las cuestiones muy generales. Ahora, en matemáticas, para un principiante son las ideas generales las más fáciles de comprender. Y esto se explica. Las preocupaciones fundamentales de los que han elaborado la aritmética, el álgebra y la geometría tienen un carácter esencialmente humano y traducen necesidades profundas del espíritu que no importa qué pueda experimentar. Si este carácter en cierto modo *natural* de las matemáticas no aparece netamente al alumno, es porque lo obstaculizan los términos técnicos especiales, los signos nuevos y los artificios de que se abusa. Podrá encontrarse embarazado por la colocación en evidencia de un factor común de los diferentes términos de un polinomio. Pero, en seguida, puede hacérsele comprender muy claramente el problema general que todas las reglas de cálculo algebraico tienen para resolver. Cualquiera que sea la identidad que tengamos a la vista, siempre nos enseña que tal serie de operaciones y tal otra conducen a dos resultados iguales cuando se efectúan con los mismos números. Ahora, si se propone a un niño un cálculo fácil, que exija mucho tiempo, pero susceptible de ser simplificado, él mismo ensayará imaginar un cálculo equivalente y más rápido. Y dos o tres ejemplos del mismo género le harán comprender lo que se entiende por *expresiones equivalentes.* Y bien, es cierto que muchos alumnos aplican las reglas del cálculo algebraico sin formarse una idea clara de su rol.

Y, de la misma manera, muchos alumnos que aprenden dócilmente demostraciones en sus textos de geometría, son incapaces de distinguir las demostraciones que son rigurosas y convincentes de las que no lo son. Las demostraciones que hace un alumno no ejercen una acción educativa sobre su inteligencia si no las hace con una firme convicción. Exponer demostraciones sobre cuya so-

lidez no se tiene seguridad, es querer convencer a los demás antes de estar convencido uno mismo.

Lo repito: si el profesor tuviera menos apuro podría hacer comprender claramente al niño el sentido de estas palabras que incesantemente emplea en sus lecciones: *teorema, recíproca, demostración*, etc. Y, de paso, le haría hacer buena psicología mostrándole como, en matemáticas, puede llegarse a hacer partícipe de la opinión propia a un contradictor. También le explicaría porque, en ciertos dominios, es mucho menos fácil.

Si algunos profesores no quieren tratar en una lección más que uno o dos pequeños temas muy limitados, es que así ellos podrán proponer a sus alumnos, para la próxima vez, una tarea muy definida y entonces reconocer fácilmente los que merecen una mala. Pero procediendo de esa manera, trazan fronteras entre dominios donde no debiera haberlas.

Clasificando y subdividiendo las cosas por razones de comodidad, la escuela suprime las relaciones que existen entre las cuestiones y entre los fenómenos y resta a éstos una gran parte de su interés y de su verdadera significación.

Sin insistir sobre este punto, agregaré que el estudio de las matemáticas podría hacerse mucho más atrayente. Lo sería más para el alumno si éste con menos frecuencia fuera obligado a escuchar y más frecuentemente se le obligara a investigar. Hay demasiados momentos en que está inactivo y en que se fastidia. Ahora, como ya lo he dicho, en las lecciones a que me refiero, el rol del profesor y el del libro podrían atenuarse más que en la mayor parte de los demás; pues los medios naturales de que el alumno dispone lo colocan en condiciones de trabajar solo, si los problemas que tiene que resolver han sido convenientemente escogidos y graduados.

En fin, a propósito de problemas, diré todavía que no hay bastante variedad en los que se proponen a los alumnos. Sin duda, es solamente por medio de ejercicios

repetidos que se hace un buen calculador. Pero, por otra parte, importa absolutamente que el alumno esté frecuentemente interesado en su trabajo. Y ésto no es incompatible con aquéllo.

Me limitaré a un solo ejemplo. El capítulo de las *coordinaciones* de las *permutaciones* y de las *combinaciones*, ordinariamente, sólo es enseñado a los alumnos de los gimnasios, de 16 o 17 años de edad. Ahora, se le podría hacer fácilmente inteligible para alumnos mucho más jóvenes, por medio de problemas pintorescos que cada profesor imaginaría sin dificultad.

No es preciso que el orden establecido por la escuela en las materias de enseñanza disminuya la vida intelectual del alumno. La naturaleza ha puesto orden en sus creaciones; y en la inteligencia de los seres jóvenes las ideas no se suceden como en los programas escolares. En suma, nada mejor podemos hacer que suministrar a nuestros alumnos ocasiones contínuas de reflexionar, de entusiasmarse y de ejercitar sus fuerzas.

No puede hablarse de la enseñanza de las matemáticas sin pensar en las condiciones generales en las cuales se instruyen los alumnos. Esta enseñanza, como todas las demás, sufre de los defectos de nuestra pedagogía tradicional. Voy a indicar brevemente algunos de esos defectos, los que considero muy graves.

Con demasiada frecuencia se trata al alumno como a un prevenido del cual se sospecha la desatención y la pereza, y los frecuentes interrogatorios a que se le somete le hacen comprender que él tiene interés en esconder su ignorancia. El efecto de este régimen es disminuir sensiblemente la libertad de espíritu del niño, su tranquilidad, su entusiasmo y su sinceridad.

El interés y el valor educativo de las lecciones son disminuídos por el hecho de que el profesor, habitual-

mente, debe considerar como temas de examen y no como temas de conversación los asuntos de que habla a los alumnos. Quiero decir, que separando y dividiendo las cuestiones, impide al alumno comprender la interdependencia de los fenómenos.

En particular, la repartición de las materias de enseñanza en *ramas* completamente distintas, atribuídas a otros tantos profesores especiales, ofrece muy graves inconvenientes.

Desde luego, aumenta la monotonía de las lecciones. Todos hemos podido observar que nuestros alumnos nos escuchan con mayor atención cuando nos ocurre hablar de cosas que están fuera de nuestra especialidad.

Por otra parte, cuando un mismo alumno tiene demasiados profesores, puede suceder que la influencia de uno sea en parte neutralizada por la de los otros. Y después, ese niño deberá quizá satisfacer demasiadas exigencias.

Esta costumbre de hacer que nuestros alumnos sigan cursos completamente distintos, en cada uno de los cuales las cuestiones tratadas son del mismo orden, tiene una consecuencia extravagante. Un curso al cual no se consagra más que una hora por semana se compone de unas cuarenta lecciones, pues, lo más frecuente es que la duración de un curso sea por lo menos de un año. Ahora, de tiempo en tiempo, se decide — y ésto quizá por excelentes razones — tratar ante los alumnos cuestiones de un nuevo género. Absurdamente se deduce que debe agregarse un curso más a los que ya menciona el plan de estudio; y, así, el número de lecciones a que el niño debe asistir durante el año necesariamente aumenta en 40, — cuando con media docena de lecciones, en ciertos casos, podría bastar, media docena de lecciones que podrían incorporarse en un curso ya existente sin aumentar su duración.

Enseñando varias ciencias a la vez, el profesor podría hacer comprender mejor a sus alumnos la significación de cada una de ellas. Por ejemplo, una expresión alge-

braica tiene un sentido más claro cuando en ella puede verse una manera cómoda de expresar el resultado de algunas experiencias de física o de mecánica. Lo mismo, la estrecha dependencia que existe entre los problemas de mecánica y de geometría es evidente. De paso, me permito agregar que un profesor de literatura obtendría reales ventajas por el hecho de enseñar también la historia y la geografía. Pues no se trata de que nuestros alumnos se hagan precoces especialistas. En fin, puesto que me he atrevido a lanzarme en la utopía, observaré todavía, que en las lecciones en que no se hace más que enseñar a un alumno su lengua materna, se le hace hablar en momentos en que no tiene ningún sentimiento, ninguna idea que expresar: breve, en momentos en que nada tiene que decir, y solamente para darle la ocasión de aplicar una regla que acaba de aprender. El ideal sería que la enseñanza de la lengua materna fuera dada al mismo tiempo que las demás, es decir, en todos los casos en que el niño emplea espontáneamente su lengua materna para formular su pensamiento. Se me hará observar que en la enseñanza, como fuera de ella, la división del trabajo es necesaria. Preguntaría entonces si es necesaria desde el principio.

No insistiré sobre el hecho de que los alumnos están demasiado tiempo encerrados y sentados, y que por ello sufre su salud. Este tema ya ha sido tratado con frecuencia.

No tengo más que una cosa que reprochar a la Escuela, antes de resumir: es la siguiente.

La Escuela se aplica a dar a los niños conocimientos tan extensos como es posible; pero no se preocupa de mejorar todo lo que en ellos hay de precioso y de perfectible. Hay aptitudes fundamentales del ser humano de las cuales el pedagogista se desinteresa. El alumno habitualmente solo, se sirve de sus ojos para leer o para seguir lo que escribe: casi nunca los emplea, en clase, para observar. Sus manos le sirven para tener una lapicera,

un lápiz, un libro o un cuaderno: casi nunca las usa para confeccionar o para construir objetos. En fin, sus pies únicamente le permiten, durante las lecciones, hacer ruido bajo la mesa o acariciar la espalda del compañero que tiene delante. La educación física del niño es en gran parte sacrificada. Mejor ejercitados su vista, sus manos y sus pies, podrían tener para él un valor mucho mayor. Me limitaré a observar que nuestras sensaciones podrían, en ocasiones bien elegidas, sugerirnos ideas justas en mecánica, que nos permitirían comprender mejor esas fórmulas en las que tantos alumnos no ven más que las letras *m*, *v*, *t*, *l*, *g* y *f*.

En suma, a despecho de la riqueza aparente de los programas, el niño, en la escuela, casi siempre hace la misma cosa. En la mayor parte de sus lecciones se exige de él la misma actitud. Y la consecuencia de ésta monotonía es que con frecuencia se fastidia.

Me detengo, pues ya he abusado de vuestra paciencia.

En resumen, por las razones que he expuesto, las lecciones de matemáticas dadas en buenas condiciones pueden cooperar de una manera particularmente eficaz a la educación intelectual del alumno. Y puesto que en esas lecciones más se trata de inculcarles uno o dos buenos hábitos de espíritu y de desarrollar en él una cierta habilidad, que de aumentar su saber propiamente dicho (saber cuyas lagunas podrán ser llenadas más tarde), importa que ellas sean en suficiente número.

El estudio de las matemáticas favorece también el desarrollo moral del niño, porque lo hace atento y escrupuloso en sus afirmaciones, y porque aquel estudio le muestra sin cesar casos en qne, por la reflexión, la perseverancia y la probidad intelectual se llega por sí mismo a distinguir el error de la verdad. Adquiere así una legítima confianza en lo que el cerebro humano tiene de bueno.

Y puesto que, desde hace cuatro o cinco años, se habla tanto de educación nacional, agregaré que a pesar de su carácter esencialmente internacional, la enseñanza de las matemáticas, mejor que cualquiera otra enseñanza, puede desarrollar en el alumno una o dos cualidades fundamentales sin las cuales se es un hombre mediocre y un ciudadano poco útil. Tanto en la vida pública como en los laboratorios importa saber razonar justo y no satisfacerse con palabras.

Pero debo recordarlo al terminar: todas las lecciones que el alumno recibe podrían ser mejoradas y todas podrían ejercer sobre su desarrollo una acción mucho más favorable. Cada profesor, y ésto podría fácilmente explicarse, es conducido a exagerar la importancia de su propia enseñanza, Cada uno, en cierto modo, es un especialista cuyo trabajo es en general independiente del de sus colegas. El resultado ha sido la sobrecarga de los programas de que son víctimas nuestros alumnos desde hace largo tiempo. Me cuesta comprender la inocencia de algunos reformadores que se imaginan que se realizaría un progreso sensible si se consagraran dos horas más por semana a tal enseñanza y dos horas menos a tal otra. Lo que debe modificarse profundamente es el régimen escolar a que están sometidos los niños; es el espíritu de la enseñanza, y es, al mismo tiempo, el estado de espíritu del alumno.

La cuestión fundamental que habrá que plantearse necesariamente algún día es la siguiente:

¿Qué fin queremos asignar a la Escuela? ¿Qué pretendemos principalmente?

Cuando nos formemos una idea clara de las aptitudes que ante todo importa desarrollar en el niño, comprenderemos lo que deben ser nuestros programas y nuestros métodos de enseñanza.

TESIS DEL PROFESOR ROORDA

1. La distinción que se hace entre las ramas de enseñanza susceptibles de dar al alumno una *cultura general* y aquellos a los que no se reconoce esa virtud no tienen fundamento.

2. Las lecciones en que se trata de enseñar al alumno una cierta técnica, de desarrollar en él cierta habilidad, deben ser más numerosas que las demás.

3. El espíritu geométrico no es más que el espíritu de fineza aplicado a las cuestiones que se pueden resolver con exactitud.

4. El estudio de las matemáticas habitúa a ser afirmativo en los casos en que se debe serlo y a suspender su juicio en los demás casos.

5. No existe dominio en que la distinción entre lo *verdadero* y lo *falso* sea tan fácil de hacer como en matemáticas; ningún dominio existe, pues, en que la necesidad de ser escrupuloso en sus afirmaciones se haga sentir tan intensamente.

6. En matemáticas, el alumno aprende a descubrir la verdad sin el auxilio del profesor.

7. Estudiando las matemáticas, se aprende a hacer razonamientos rigurosos. El hombre que razona mal carece de probidad intelectual.

8. En matemáticas, el niño estudia cuestiones sobre las cuales puede hacerse el acuerdo de todas las inteligencias.

9. Si las matemáticas no tienen para el niño todo el valor educativo afirmado en las *tesis* precedentes, se debe principalmente a la manera cómo se enseñan y a los caracteres generales de nuestro régimen escolar.

A) Demasiado apresurado, el profesor enseña con frecuencia medios expeditivos a sus alumnos antes que éstos se formen una idea clara del fin que se pretende.

B) En clase, el niño aprende menos a observar y a investigar que a responder a cuestiones previstas.

C) Hacer principiar a un alumno una demostración de la cual no siente el rigor, es pedirle que convenza a los demás antes de convencerse él mismo.

D) Existe demasiado apresuramiento en poner al alumno en condiciones de demostrar que sabe algo.

E) Se le quita su libertad de espíritu tratándolo como un prevenido que, en cada momento, puede ser tomado en flagrante delito de ignorancia.

F) Por las demasiado numerosas fronteras que de inmediato traza entre las materias de enseñanza, la Escuela suprime las relaciones que existen entre los fenómenos, y compromete la educación intelectual de sus alumnos.

G) La suma de los conocimientos que un alumno debe adquirir en un tiempo dado, no depende ni de sus gustos ni de sus aptitudes.

VI

SOCIEDAD SUIZA DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

(Reunión de Baden, 8 de Octubre 1916) (1)

Esta sociedad tuvo su 19a. asamblea en Baden, bajo la presidencia del profesor Matter.

Una Comisión de la Escuela Politécnica federal publicó, en 1917, un informe referente a la educación nacional en Suiza, informe que aspira a una reforma general de la enseñanza. Respecto de la enseñanza en las escuelas medias, el ponente reclamaba un aligeramiento de la parte científica (matemáticas, ciencias físicas y naturales) en beneficio de las materias llamadas de *cultura general*, en particular de la historia y de la geografía: « Las ramas matemáticas y científicas de tal modo aca- « paran las fuerzas intelectuales de los alumnos, que oca- « sionan perjuicio a las materias de cultura general.», decía el informe. El Comité, considerando cuando menos

(1) De L'Enseignement mathématique, 1916.

exageradas esas conclusiones, y amenazada la posición de la enseñanza de las matemáticas, había puesto en la orden del día de la sesión, la discusión de ese informe. A fin de ilustrar esa discusión y de permitir un juicio sano de las cuestiones suscitadas, el Comité juzgó indispensable hacer examinar nuevamente el rol que las matemáticas deben desempeñar en la formación del espíritu y el fin que debe perseguir su enseñanza. Esa fué la misión de los dos primeros informantes, los profesores Roorda, de Lausanne, y Matter, presidente.

El profesor Roorda, cuyo hermoso trabajo aparece un poco más atrás, se colocó en un punto de vista general: no le costo gran trabajo demostrar qué maravilloso instrumento son las matemáticas, cuando se trata de desarrollar jóvenes inteligencias: La simplicidad y la precisión de las nociones matemáticas permiten al alumno — más fácilmente que en cualquier otro dominio — distinguir lo verdadero de lo falso, ejercitar su juicio y también su imaginación, su facultad de invención. Si esa enseñanza no da los resultados esperados, es que el profesor se apresura demasiado, que el programa es excesivo y defectuosa la actual organización de la Escuela.

El profesor Matter se coloca más bien en oposición directa al informe de la Escuela Politécnica. Elogia a la Comisión de esa Escuela por haber puesto de manifiesto esa sobrecarga de los programas, de cuyo mal sufren actualmente casi todos los establecimientos escolares, pero protesta contra las indicadas conclusiones. La distinción entre materias de cultura general y materias de cultura profesional es enojosa: todas las materias del plan de estudios deben concurrir a la formación del espíritu, siendo sus aportes diferentes en cantidad y cualidad. Por lo demás, el valor educativo de una enseñanza reside no en la materia enseñada, sino en el *método*. Bien comprendido, el aporte de una enseñanza de las matemáticas es de primer orden y no puede ser reemplazado por el de ninguna otra materia. En esta parte de su excelente infor-

me el profesor Matter está de acuerdo con los profesores Roorda y Steinmann; se refiere también al notable trabajo de Brandenberger. Además, si la enseñanza de las matemáticas debe concurrir a formar el juicio y a desarrollar la imaginación de los alumnos, haciéndoles investigar y descubrir por sí mismos las verdades que quieren adquirir, y resolver numerosos problemas: si debe contribuir al estudio de la lengua materna obligando a los jóvenes a expresar con precisión, claridad y simplicidad sus juicios y observaciones, entonces, se requieren numerosas lecciones. Reducir el tiempo empleado en ellas, como parece desearlo la Escuela politécnica, es ir contra profundas vistas psicológicas. Por lo demás, la realización de las reformas preconizadas por la Escuela politécnica no producirá un aligeramiento real de los programas. Y, sin embargo, es indispensable, urgente: sólo podrá obtenerse dando a los alumnos la posibilidad de concentrar sus esfuerzos en una dirección determinada. Una reforma que conduciría a esos resultados es la propuesta por el profesor Keller, rector del Gimnasio de Winterthur. Consiste en subdividir en Secciones las dos clases superiores de las escuelas medias (por ejemplo, en secciones de lenguas antiguas, lenguas modernas, matemáticas, ciencias naturales, eventualmente sección pedagógica); los planes de estudios contendrían una parte general común a todas las secciones y, para cada una de ellas, una parte especial, cuyo estudio se haría con mayor profundidad: el resultado sería un trabajo más conforme con los gustos personales de los alumnos, por lo tanto, más agradable, más penetrante, más profundo.

El tercer ponente, el profesor Fiedler, rector del Gimnasio científico de Zurich, debía comenzar la discusión. Expuso las mismas protestas que el profesor Matter y, como aquél, se pronunció en el mismo sentido respecto de casi todos los puntos. Además, protesta contra la intromisión de la Escuela politécnica en las escuelas medias. El informe recriminado contiene, en efecto, la amenaza de

rehusar a los establecimientos, cuyo programa excediera notablemente las exigencias de ingreso en la Escuela policténica, la equivalencia de sus exámenes de madurez con los de ingreso en la escuela. El profesor Fiedler protesta contra esta tendencia de limitar el desarrollo de las escuelas medias obligándolas a restringir sus programas, o el de ciertas materias, y a considerar las secciones reales y técnicas de esos establecimieetos como de preparación exclusiva para la Escuela politécnica. Es partidario de la reforma Keller y propone solicitar de las universidades y escuelas superiores que declaren si esos establecimientos reconocerían los certificados de madurez, discernidos según el sistema Keller, dándoles el mismo valor que a los actuales. Invita a la Sociedad a que apoye la consulta dirigida al Departamento Federal del Interior por la Conferencia de los rectores de las escuelas medias de Suiza, tendiente a encomendar el estudio de la reforma de la enseñànza media a una comisión federal.

En la discusión el profesor Grossmann, ponente de la Comisión de la Escuela politécnica, aboga en favor de ésta diciendo que ha tenido en vista una reducción del tiempo consagrado a la enseñanza científica. Aunque en ninguna parte del informe se expresa, la Comisión ha querido reaccionar contra el acaparamiento a favor de los estudios científicos propiamente dichos, de lo mejor de las fuerzas intelectuales de los alumnos, en detrimento de la parte general de la enseñanza; la Comisión entiende por *parte general* del plan de estudios, las materias que deben ser poseídas por todos los futuros estudiantes, lo que, más o menos, corresponde a la parte del programa Keller que es común a las diversas Secciones.

El profesor Grosgurin (Ginebra), estima que el valor educativo de las matemáticas no reside en la masa de las nociones presentadas; nuestros esfuerzos deben tender a una enseñanza más educativa; es lo que expresan de una manera luminosa las tésis de los profesores Roorda y Matter.

El profesor Fueter de la Universidad de Zurich, manifiesta el gran interés que han despertado en los profesores universitarios las conferencias de los ponentes: aplaude muy especialmente las tésis del profesor Roorda; el resultado de esta sesión debe ser una invitación para que en la enseñanza de las matemáticas, se dé un espacio cada vez mayor a lo que contribuye a la cultura general; pero no puede aceptar el sistema de Keller: restringir a dos horas por semana el tiempo acordado a las matemáticas en las secciones de lenguas le parece renunciar de antemano a una enseñanza matemática que tiene algún valor educativo.

La Asamblea, en presencia de los tres grupos de tésis que, a la vez, se completan y superponen las unas sobre las otras, sólo vota la última de las tésis del profesor Fiedler, la que solicita la convocatoria de una comisión federal. Encarga a una comisión, formada por el Comité y los ponentes, de presentar a la Asamblea de la próxima primavera un grupo único de tésis, acompañadas de un informe preliminar: el todo, después de aprobado, sería trasmitido a la comisión federal encargada de estudiar la reforma de la enseñanza secundaria en Suiza.

AL TERMINAR EL 1.[ER] TOMO

La enseñanza moderna bien entendida, tal como la aplican la casi totalidad de los países europeos, se ha dividido en dos períodos o grados, que se dan en el mismo establecimiento o en establecimientos distintos: en el grado inferior que comprende de los cuatro a los seis primeros años, la enseñanza es principalmente intuitiva y experimental, de carácter práctico, y útil para las necesidades de la vida corriente; tiene, pues, un carácter muy diverso a la que llamamos secundaria en los países latino-americanos, como por otra parte es muy fácil verificarlo, comparando nuestros programas con los europeos.

En Europa se ha tenido en cuenta que la gran mayoría de los alumnos de enseñanza secundaria abandonan sus estudios sin terminar el bachillerato, y por eso se ha tratado de dar en los primeros años una enseñanza integral que sea realmente útil, y no estudios de carácter teórico, como los que aquí tenemos, que ni son de aplicación en la vida corriente, ni están al alcance de los alumnos.

Es en el segundo ciclo de los estudios que las escuelas secundarias europeas dan la enseñanza con carácter más elevado, más general, más científico y apropiado al desarrollo de las facultades de raciocinio de los alumnos; se continúa la enseñanza integral con las mismas asignaturas del primer ciclo.

Limitar el estudio de las matemáticas a los cuatro primeros años de lo que erróneamente consideramos como el primer ciclo de la enseñanza secundaria, trae como consecuencia una enseñanza de carácter racional antici-

pada, de cuestiones teóricas y abstractas que los alumnos no comprenden ni se dan cuenta de su aplicación; se les obliga así, a un estudio de pura memoria que no tiene aplicación en la vida práctica, y se elimina del segundo ciclo la asignatura más útil para fortificar las facultades de raciocinio de los alumnos.

Véanse los planes de estudios europeos y en todos ellos se encontrará el estudio de las matemáticas en todos los años aún para las secciones clásicas y literarias.

El objeto de lo que va publicado en este volumen (1) es dar a conocer los métodos que se emplean en la enseñanza moderna de las matemáticas elementales, sus características y las opiniones que al respecto han emitido los profesores de los países más adelantados. En casi todos los países de América y en algunos europeos se enseña todavía las matemáticas siguiendo los métodos clásicos que en la moderna pedagogía se consideran perjudiciales para la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de las escuelas secundarias.

En Alemania, en Austria, en Francia, en Italia y en Suiza, en las escuelas secundarias, se enseñan las matemáticas con métodos muy diferentes de los que aquí aplicamos, dedicándoles de tres a cuatro veces más de tiempo.

Hace más de 15 años que en Francia se reformaron fundamentalmente los métodos de enseñanza, y los programas de matemáticas de los Liceos, haciendo esa enseñanza absolutamente intuitiva en su primer ciclo, reduciendo el número de demostraciones de la Geometría, limitando las teorías algebraicas a sus partes de real aplicación, para así dar lugar a la enseñanza de la noción de función y de algunas de las más simples y útiles de las aplicaciones del Cálculo infinitesimal: pero todo con

(1) Comprende los siguientes fascículos: 1.° Informe de la Comisión norteamericana sobre la enseñanza de las matemáticas en Europa.— 2.° Enseñanza de las matemáticas en Alemania y Austria.— 3.° Enseñanza de las matemáticas en Bélgica y España.— 4.° Enseñanza de las matemáticas en Francia.— 5.° Enseñanza de las matemáticas en Inglaterra, Italia y Suiza.

numerosos ejercicios que aclaren los estudios teóricos y despierten el interés de los alumnos. En el mismo orden de ideas se enseñan las matemáticas en Alemania, Austria, Inglaterra, Italia, Suiza, etc.

Este movimiento, en el sentido de hacer menos teórica, más intuitiva, más experimental y de más aplicación la enseñanza matemática en los países europeos, las reformas a que ha dado lugar en los programas y en los métodos de enseñanza, los fundamentos a que obedecen esas reformas y las conclusiones a que se ha llegado en los Congresos de enseñanza de las matemáticas, son preciosos elementos de información que no parecen haberse tenido en cuenta en la elaboración de los programas y textos de matemáticas que se emplean en nuestro país y en la casi totalidad de los demás de América.

Los textos que se usan, aún los de más reciente publicación, revelan que la gran mayoría de sus autores desconocen el espíritu de la moderna enseñanza de las matemáticas, o no han asimilado sus principios pedagógicos fundamentales. Los profesores que posean la necesaria preparación matemática, y que realmente tengan empeño de formarse, encontrarán en este volumen las opiniones de los profesores más eminentes y de más autoridad de los países más adelantados en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas, los programas y conclusiones a que se ha llegado, después de meditados estudios y discusiones, y las instrucciones que deben observarse para la aplicación de esos programas. Comparando las diversas opiniones, programas e instrucciones es como se descubre la uniformidad de los principios pedagógicos a que debe subordinarse la enseñanza matemática. Después de haber estudiado con dedicación los diversos trabajos que publico en este volumen y haber deducido los principios pedagógicos que de ellos, de los programas y de las instrucciones se desprenden, es como podrán los profesores latino-americanos darse exacta cuenta de los defectos de los textos y de los métodos de enseñanza que emplean.

Para facilitar el estudio de los programas e instrucciones y la deducción de los principios pedagógicos que rigen la actual enseñanza matemática europea, y poner de manifiesto los defectos de la que se da en las escuelas secundarias americanas, publicaré en otro volúmen los programas y demás datos que se refieren a la enseñanza matemática de esas escuelas, y haré las observaciones del caso para destacar sus deficiencias pedagógicas y los serios perjuicios que de tales disposiciones resultan para la juventud.

De este modo es que tendrá nuestro profesorado, no sólo los elementos de información que necesita para mejorar su enseñanza, sino que dispondrá de valiosos datos para formar un concepto claro de lo que debe corregirse en los programas, en los textos y en los métodos de enseñanza de las matemáticas.

ÍNDICE DEL 1.er TOMO

ÍNDICE DEL 1.er TOMO

Páginas

Páginas

LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN ALEMANIA Y AUSTRIA

FASCÍCULO 4.°

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN FRANCIA

FASCÍCULO 5.º

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN INGLATERRA



Páginas

LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN ITALIA

LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN SUIZA

